

Exercice n° GE 0301

Rentabilité économique d'un système d'irrigation utilisant l'eau d'une nappe phréatique

Avant propos :

Un agriculteur souhaite pour une irrigation utiliser l'eau d'une nappe phréatique dont le toit est situé à une profondeur z_0 et qui est limité en profondeur par un substratum imperméable situé à la profondeur z_s (*surface irriguée* : $s=1ha$). Le débit soutiré q est proportionnel à la hauteur de rabattement de la nappe h au dessus de la pompe, ($q=1/\alpha *h$). Le coût annuel de cet aménagement $C(q)$ comprend l'amortissement des investissements P par annuités constantes Co et comprend des frais d'exploitation dont le montant est proportionnel au volume pompé V et à la profondeur du pompage z (coût = βVz).

Questions

On vous demande de déterminer et de résoudre le problème d'optimisation permettant de maximiser le bénéfice annuel $B(q)$ de l'agriculteur. On tiendra compte d'une relation du type $G(q) = -aq^2 + bq + c$ exprimant le gain lié à la production (en Frs par hectare irrigué) en fonction de l'apport en eau pour l'irrigation.

Question 1. Déterminer le problème d'optimisation S (fonction objectif à maximiser + contraintes)

Question 2. Exprimer en fonction des différents paramètres du problème la fonction objectif à maximiser pour maximiser le bénéfice $B(q)$

- On pourra écrire la fonction bénéfice de l'agriculteur sous la forme suivante :

$$B(q) = \xi + \varepsilon * q - \eta * q^2$$

Les expressions de ξ , η et ε étant à déterminer. On pourra représenter graphiquement les fonctions $C(q)$, $G(q)$ et $B(q)$.

- Déterminer l'expression analytique du débit de pompage optimum (q_m) pour S , en fonction de ξ , η et ε
- Déterminer l'expression analytique du bénéfice maximum $B(q_m)$ en fonction de ξ , η et ε

Question 3. Discuter de l'utilité du pompage pour les différentes configurations proposées (cf. ci-dessous).

Données de l'exercice :

Les 3 configurations à étudier sont :

Scénario 1 : sous sol = gravier conductivité : $K=1^e-3$ + rayon d'action = 200m (valeur empirique)

Scénario 2 : sous sol = sable conductivité : $K=5^{-5}$ + rayon d'action = 60m (valeur empirique)

Scénario 3 : sous sol = gravier avec Coût d'exploitation du pompage $\beta=0.25\text{Fr}/\text{m}^3/\text{m}$
Profondeur du toit de la nappe $z_0=8\text{m}$

Une feuille de calcul Excel à compléter est disponible dans le fichier « GE0301_feuillecalcul.xls ».

Remarques :

1. (en régime permanent), pour la partie linéaire de la courbe caractéristique du puits : utilisation de la formule de Vibert valable pour un puits à fond et parois latérales perméables.

$$q = K\pi \frac{h.H}{\ln(R/r_o)} = \frac{1}{\alpha} (z - z_0)$$

avec h : hauteur du rabattement (m) H : hauteur de la nappe (m)
 R : rayon d'action du puits (m) r_o : rayon du puits (m)

2. Le débit optimum q_{opt} pour le gain produit par le champ est supposé correspondre au débit nécessaire à la compensation des pertes journalières par évapotranspiration ETR. Le gain G_0 produit par le champ sans irrigation correspond à 40% du gain optimum G_{opt} .

Applications numériques

		Scénario 1	Scénario 2	Scénario 3
Remboursement de l'installation				
nombre années remboursement	N	20	20	20 années
Cout initial de la construction	P	10000	10000	10000 Frs
taux d'emprunt	r	3	3	3 %
Annuité	Co			Frs
Coût d'exploitation du pompage				
coût du pompage / m ³ / m	β	0.05	0.05	0.25 Frs/m ³ /m
Temps d'irrigation et surface irriguée				
Surface à irriguer	S	1	1	1 ha
Nbre de mois d'irrigation par an		3	3	3 mois/an
Nbre de jour d'irrigation par mois		10	10	10 jours/mois
Nbre d'heure d'irrigation par jour		4	4	4 heures/jour
relation entre débit d'irrigation et gain produit par la culture de surface 1ha				
gain sans irrigation	Go	800	800	800 Frs/an/ha
gain maximum avec irrigation	Gopt	2000	2000	2000 Frs/an/ha
débit d'irrigation pour gain maximum (=ETR)	qopt	5	5	5 mm/jour
caractéristiques de la nappe				
profondeur du toit	Zo	4	4	8 m
profondeur du substratum	Zs	20	20	20 m
conductivité de la nappe	K	1.00E-03	5.00E-05	1.00E-03 m/s
caractéristiques du pompage				
profondeur du pompage	z			m
rayon puit	ro	0.5	0.5	0.5 m
rayon d'action du pompage	R	200	60	200 m
coefficient de proportionnalité $\alpha=(z-zo)/q$	α			1/ α en m ³ /s/m
Coefficients de la fonction de gain				
$G(q) = -a \cdot q^2 + b \cdot q + c = d - a (q - q_{opt})^2$				
	a			
	b			
	c			
	d			
Fonction bénéfice $B(q) = -\eta \cdot q^2 + \varepsilon \cdot q + \xi$				
$\xi = \dots\dots\dots$	ξ			
$\eta = \dots\dots\dots$	η			
$\varepsilon = \dots\dots\dots$	ε			
débit de pompage optimum pour bénéfice maximum de l'agriculteur q_m m³/s				
Bénéfice pour le débit de pompage optimum	B(q_m)			Frs/an
contrainte Bénéfice > bénéfice sans irrigation				
% de bénéfice supplémentaire	$B(q_m) - G_0$ $[B(q_m) - G_0] / G_0$			Frs %