

Exercice n° HA 0403 - Corrigé

Construction d'un hydrogramme conceptuel de Nash et calage des paramètres n et t_p à partir d'un événement pluie nette – débit ruisselé

Données de l'exercice :

L'exercice porte sur l'événement pluie nette/débit ruisselé enregistré au niveau d'un bassin versant de 300 km². Les données de cet exercice sont regroupées dans le Tableau 1 et la figure 1 de l'énoncé et dans le fichier Excel « HA0403_enonce.xls ». Le corrigé de l'exercice se trouve également dans un document Excel « HA0403_corrige.xls ».

Question 1. Détermination de l'Hydrogramme Unitaire Conceptuel (HUC) de Nash

⊙ Méthode à appliquer : Hydrogramme Unitaire Conceptuel (HUC) de Nash

L'hydrogramme unitaire proposé par Nash est un modèle conceptuel utilisant l'effet de laminage d'une cascade linéaire de n réservoirs ayant un coefficient de stockage K identique. Il est alors possible d'exprimer la grandeur $Q(t)$ en fonction du temps de montée t_p et du débit de pointe Q_p selon l'expression suivante :

$$Q(t) = Q_p \cdot \left(\frac{t}{t_p} \right)^{(n-1)} \cdot e^{-(1-n) \cdot \frac{t}{t_p}} \cdot e^{-n-1} \quad (1)$$

$Q(t)$: fonction de vidange des n réservoirs [1/h],
 K : coefficient de stockage des réservoirs [h],

$$K = \frac{t_p}{(n-1)}$$

t_p : temps de montée [h],

n : nombre de réservoirs, adimensionnel,

Q_p : débit de pointe [1/h],

$$Q_p = \frac{1}{K \cdot \Gamma(n)} \cdot (n-1)^{(n-1)} \cdot e^{1-n}$$

$\Gamma(n)$: fonction Gamma, adimensionnelle.

$$\Gamma(n) = (n-1)! \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

L'hydrogramme de Nash est donc caractérisé, pour un bassin versant donné, par les valeurs prises par les paramètres n et t_p .

⊙ Démarche et résultats :

Étape 1 : Etablir et calculer les valeurs des paramètres K , Q_p du modèle de l'Hydrogramme Unitaire Conceptuel de Nash normé à 1 mm, en fixant arbitrairement une valeur aux paramètres n (nombre entier) et t_p .

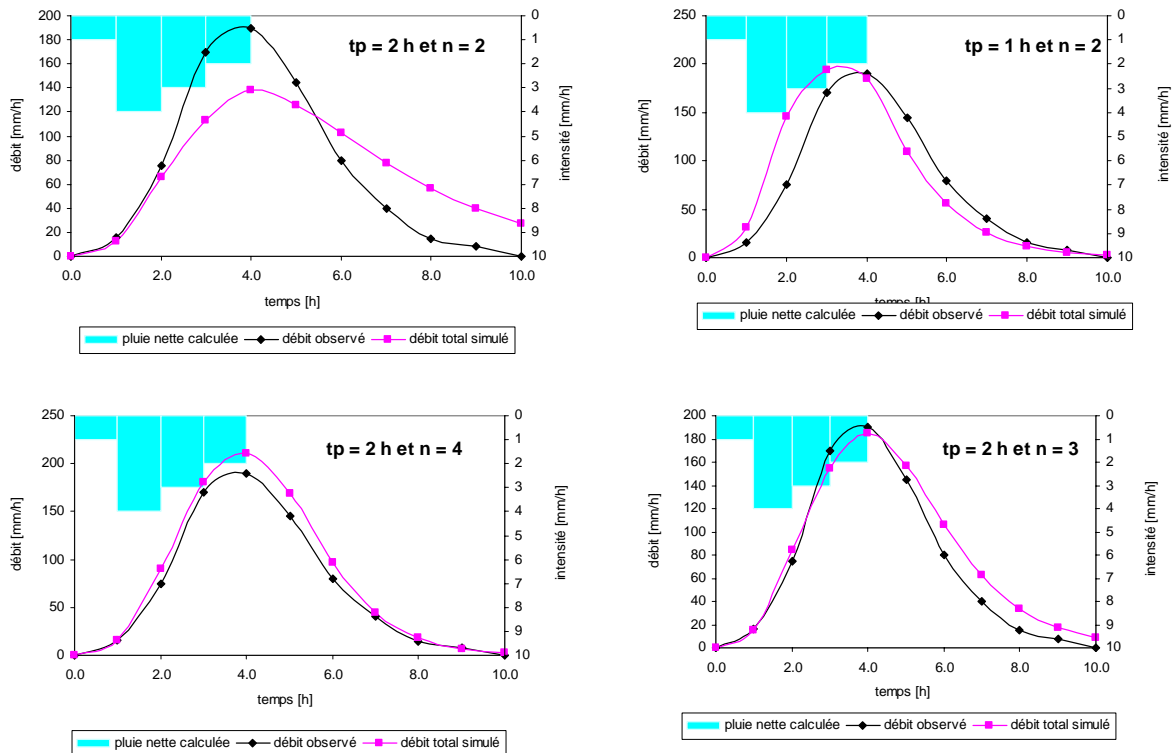
Il faut multiplier la valeur de Q_p par la surface du bassin versant considéré pour obtenir un débit en m³/s.

Étape 2 : Pour chaque pas de temps de 1 heure, calculer la grandeur $Q(t)$ en m³/s d'après l'équation (1) et les valeurs de K , Q_p précédemment obtenues.

Etape 3 : Construire l'hydrogramme de ruissellement résultant de la pluie nette avec l'HUC de Nash en utilisant le principe de convolution.

Pour chaque incrément de pluie nette on multiplie les ordonnées de l'HUN par le volume net précipité durant le pas de temps. De plus chaque hydrogramme obtenu est décalé dans le temps d'une durée égale au pas de temps de calcul (1 heure). Enfin l'hydrogramme total s'obtient en sommant les hydrogrammes déterminés précédemment (Figure 1).

Etape 4 : Ajuster « manuellement » les valeurs de n (nombre entier) et t_p selon le critère visuel (ajustement des courbes des débits observés et simulés) sachant que n a une influence sur la forme de l'HU alors que t_p agit sur la position de la pointe.



Pour $n = 2$ et $t_p = 3$ h l'hydrogramme simulé présente un débit maximal bien estimé ainsi qu'un temps de pointe semblable par rapport aux observations

⊙ Attention !

Dans le cas où le nombre de réservoir n n'est pas un entier, la fonction Gamma peut être déterminée par la combinaison¹ des équations (2) et (3) et pour $1 < n < 4$:

$$\Gamma(n+x) = (n-1+x) \cdot (n-2+x) \cdot (n-3+x) \cdot \dots \cdot (1+x) \cdot \Gamma(1+x) \text{ avec } n \in \mathbb{N} \text{ et } x \in \mathbb{R} \quad (2)$$

$$\text{avec } \Gamma(x+1) = 1 + a_1 \cdot x + a_2 \cdot x^2 + a_3 \cdot x^3 + a_4 \cdot x^4 + a_5 \cdot x^5 \text{ pour } x \leq 1 \quad (3)$$

Avec :

a_1 :	-0.5748646	a_4 :	0.4245549
a_2 :	0.9512363	a_5 :	-0.1010678
a_3 :	-0.6998588		

¹ : Handbook of mathematical functions, 1965, 8th edition, Dover Publications, Inc., New-York, pp. 256-263

Question 2. Critère(s) pour apprécier la qualité de l'ajustement des débits observés par ceux simulés

Au paragraphe précédent la qualité de l'ajustement de l'hydrogramme reposait sur un critère visuel : bien que subjectif il ne devra jamais être négligé ni omis. Une manière complémentaire pour apprécier l'ajustement consiste en l'emploi de critères mathématiques quantifiant la différence entre les hydrogrammes observé et simulé. On présente ci-dessous quelques unes des fonction-critères utilisées en hydrologie :

Fonction-critère 1 :
$$\sum_t (Q_{obs}(t) - Q_{sim}(t))$$

Fonction-critère 2 :
$$\sum_t (Q_{obs}(t) - Q_{sim}(t))^2$$

Fonction-critère 3 :
$$|Q_{obs\ max} - Q_{sim\ max}|$$

Fonction-critère 4 (Nash) :
$$1 - \frac{\sum_{k=1}^n (Y_{sim}(x_k) - Y_{obs}(x_k))^2}{\sum_{k=1}^n (Y_{obs}(x_k) - \overline{Y_{obs}})^2}$$

Avec :

$Q_{obs}(t)$: débit observé au temps t , en [m³/s]

$Q_{sim}(t)$: débit simulé au temps t , en [m³/s]

$Q_{obs\ max}$: débit observé maximal, en [m³/s]

$Q_{sim\ max}$: débit simulé maximal, en [m³/s]

L'emploi de ces fonction-critères doit se faire néanmoins avec une certaine prudence et leur choix doit être subordonné à l'objectif fixé (simulation du débit de pointe, de l'allure générale de l'hydrogramme, etc.).

Question 3. Intervalle optimal des paramètres de l'hydrogramme de Nash

Pour un bassin versant la détermination des valeurs optimales (n , t_p) doit normalement se baser sur un certain nombre d'événements pluie – débit de manière à ce qu'elles puissent être représentatives du comportement hydrologique du bassin en général.

Ici, pour l'événement pluie – débit considéré, il est possible de faire varier la valeur de n (nombre non entier), respectivement celle de t_p , dans un intervalle donné puis de calculer pour chaque couple (n_i , t_{pi}) la valeur de la fonction-critère. Dès lors il est possible de représenter des surfaces d'iso-valeur de la fonction-critère ou surfaces de réponse comme proposé dans la figure suivante. Celle-ci montre que l'analyse de sensibilité de la fonction-critère par rapport aux variations des paramètres du modèle permet de considérer non plus une valeur optimale des paramètres, mais un intervalle dans lequel leur combinaison donne des simulations « acceptables ».

Un programme simple en visual basic disponible sur le fichier Excel « Exercice HA 0403–corrigé.xls » permet de faire varier n et t_p .

Analyse de sensibilité du critère de Nash à la variation des paramètres t_p et n

