ÉCOLE POLYTECHNIQUE FÉDÉRALE DE LAUSANNE

Exercice n° HA 0501 - Corrigé

Propagation de crue: utilisation de deux méthodes de calage des paramètres *K* et *X* de la méthode de Muskingum

Données de l'exercice :

Les caractéristiques du tronçon de canal en terre étudié sont résumées dans le tableau 1-énoncé. Les hydrogrammes entrant et sortant sont donnés dans le tableau 2 et la figure 1 de l'énoncé. Les données de cet exercice sont aussi regroupées dans le fichier Excel « HA0502_enonce.xls ». Le corrigé de l'exercice se trouve également dans le document Excel « HA0502_corrige.xls ».

Question 1. Détermination des paramètres de Muskingum

⦿ Méthode à appliquer : Détermination des paramètres *K* et *X* par la méthode graphique

L'estimation des paramètres de Muskingum par la méthode graphique repose sur deux formulations de la variation du volume d'eau stockée dans le bief entre les temps *t* et *Δt*, à savoir la variation de volume d'eau moyen (équation 1) et la variation de volume instantané (équation 2).

$$S_{t+\Delta t} - S_t = \left(\left(\frac{I_t + I_{t+\Delta t}}{2}\right) - \left(\frac{O_t + O_{t+\Delta t}}{2}\right)\right) \cdot \Delta t = \Delta S_{t+\Delta t} \qquad (1)$$

$$S_{t+\Delta t} - S_t = K \cdot \left(X\left(I_{t+\Delta t} - I_t\right) + (1-X)\left(O_{t+\Delta t} - O_t\right)\right) = K \cdot D_{t+\Delta t} \qquad (2)$$

avec

S_t, $S_{t+\Delta t}$: volume d'eau stocké dans le bief à l'instant *t* et *t+Δt*, en [m³]

O_t, $O_{t+\Delta t}$: débit sortant (« *Outflow* ») du bief à l'instant *t* et *t+Δt*, en [m³/s]

I_t, $I_{t+\Delta t}$: débit entrant (« *Inflow* ») dans le bief à l'instant *t* et *t+Δt*, en [m³/s]

Δt : pas de temps de calcul, en [s]

K : temps de propagation de l'onde de crue dans le bief, en [s]

X : facteur de pondération, adimensionnel

L'équation (2) est une expression linéaire, de pente *K*, entre le débit pondéré ou vidange pondérée $D_{t+\Delta t}$ transitant dans le bief à l'instant $t+\Delta t$ et la variation de volume d'eau correspondant $\Delta S_{t+\Delta t}$.

La détermination de la valeur optimale des paramètres *X* et *K* peut se faire graphiquement et est obtenue lorsque les couples $\left(D_{t+\Delta t}, \Delta S_{t+\Delta t}\right)$, $\Delta S_{t+\Delta t}$ étant calculé d'après l'équation 1, s'alignent au-mieux selon une droite de pente *K*.

⦿ Démarche et résultats :

Etape 1 : choix d'un pas d'itération *Δt*.

Suivant les données au pas de temps journalier, le pas d'itération *Δt* est choisi égal à 1 jour. Il faudra vérifier s'il respecte les contraintes de stabilité numérique. On a donc *Δt* en seconde :

$\Delta t = 1\times24\times3\,600 = 86\,400$ s

Etape 2 : choix d'une valeur de *X*

Le facteur de pondération *X* est normalement compris entre 0 et 1, mais l'expérience montre qu'en générale *X* est compris entre 0,2 et 0,3. Cependant, pour illustrer les conséquences du choix de *X*, on choisit de tester les valeurs de *X* entre 0,1 et 0,5 dans cet exercice.

On peut par exemple commencer par *X*=0,1.

Etape 3 : calcul du terme de vidange pondérée $D_{t+\delta t}$ $\left(X\left(I_{t+\Delta t}-I_t\right)+(1-X)\left(O_{t+\Delta t}-O_t\right)\right)$ pour chaque pas de temps à partir des valeurs instantanées des débits entrant et sortant au pas de temps *t* et de la valeur de *X* choisie.

- Au pas de temps *t*= 1, D_0=0
- Au pas de temps *t*= 2,

$$D_2 = 0.1\left(I_2 - I_1\right) + \left(O_2 - O_1\right)\left(1-0.1\right) = 0.1\left(270-180\right) + (1-0.1)\left(200-160\right) = 45 \text{ m}^3$$

- Au pas de temps *t*= 3,

$$D_3 = 0.1\left(I_3 - I_2\right) + \left(O_3 - O_2\right)\left(1-0.1\right) = 0.1\left(420-270\right) + (1-0.1)\left(280-200\right) = 87 \text{ m}^3$$

etc…

Etape 4 : Calcul de la variation du volume d'eau stocké dans le bief pour chaque pas de temps à partir des débits moyens calculés entre les temps *t=j* et *t=j*+1 selon l'équation (1).

- Au pas de temps *t*= 1, ΔS_1=0
- Au pas de temps *t*= 2,

$$\Delta S_2 = \left(\left(\frac{I_1+I_2}{2}\right) - \left(\frac{O_1+O_2}{2}\right)\right)\cdot 86400 = \left(\left(\frac{180+270}{2}\right) - \left(\frac{160+200}{2}\right)\right)\cdot 86400 = 3888\ 10^3 \text{ m}^3$$

- Au pas de temps *t*= 3,

$$\Delta S_3 = \left(\left(\frac{I_2+I_3}{2}\right) - \left(\frac{O_2+O_3}{2}\right)\right)\cdot 86400 = \left(\left(\frac{270+420}{2}\right) - \left(\frac{200+280}{2}\right)\right)\cdot 86400 = 9072\ 10^3$$

ect…

Etape 5 : représentation graphique des couples $\left(D_{t+\Delta t}, \Delta S_{t+\Delta t}\right)$ calculés aux points précédents (Figure 1, pour *X*=0.1).

Etape 6 : estimation de la qualité de l'ajustement de ces couples par rapport à une droite.

Le plus simple est de calculer le coefficient de corrélation R^2 entre les couples $\left(D_{t+\Delta t}, \Delta S_{t+\Delta t}\right)$ et la droite de régression associée.

Etape 7 : choix d'une nouvelle valeur de *X* si l'ajustement obtenu n'est pas correct (retour étape 2) ou si l'on veut tester de nouvelles valeurs de *X*. Ainsi les étapes 2 à 6 sont à répéter jusqu'à l'obtention de la meilleure valeur possible de R^2, qui est égale à l'unité pour un alignement parfait. Sinon, passer à l'étape 8.

Etape 8 : détermination de *K*.

- Pour cet exercice, on aboutit après plusieurs essais à une valeur optimale de X :

_X_= 0.10 (indice de détermination _R_ égal à 0.95)

- On calcul alors le paramètre K, qui n'est autre que la pente générale de la courbe formée par les points $\left(D_{t+\Delta t}, \Delta S_{t+\Delta t}\right)$: ***K*= 49,8 heures**

Les résultats finaux pour X=0.1 sont regroupés dans la figure 1 et le tableau 1.

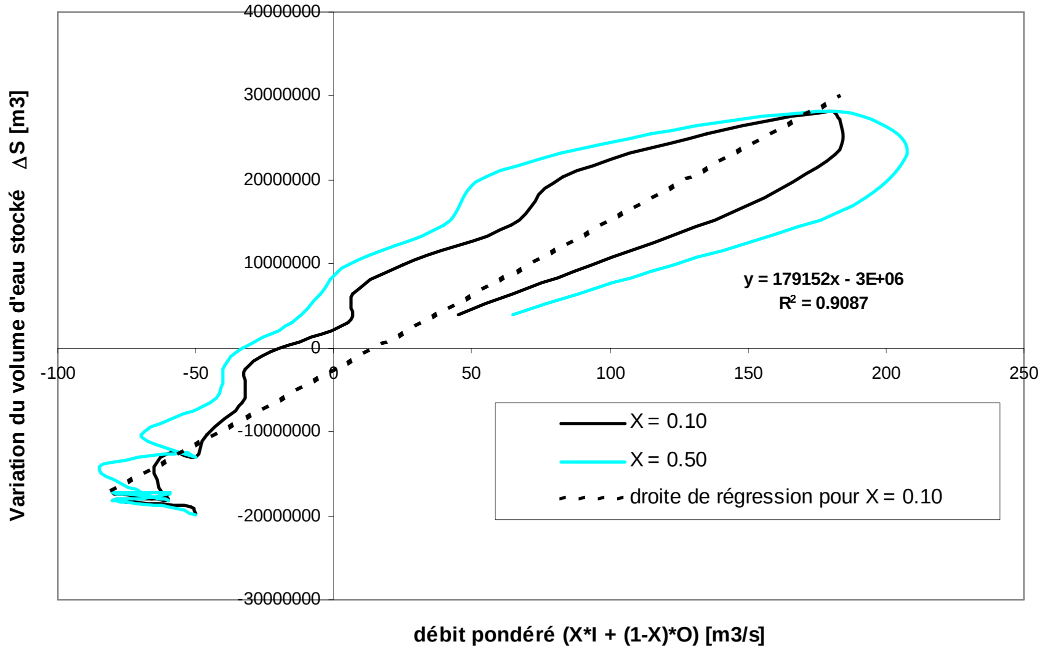

Figure 1 : Représentation du débit pondéré en fonction de la variation de stock dans le bief pour deux valeurs du paramètre X

Tableau 1 : Détermination des paramètres K et X de Muskingum pour X valant 0.20

Temps *[jour]*	***Débit entrant*** *[m^3/s]*	***Débit sortant*** *[m^3/s]*	***Débit pondéré*** *[m^3/s]*	***Variation du volume tocké*** *[m^3]·10^3*
1	180	160		
2	270	200	45	3888
3	420	280	87	9072
4	650	415	144.5	16200
5	890	590	181.5	23112
6	1100	770	183	27216
7	1270	950	179	28080
8	1360	1090	135	25488
9	1380	1180	83	20304
10	1390	1250	64	14688
11	1370	1280	25	9936
12	1350	1290	7	6480
13	1310	1300	5	3024
14	1260	1280	-23	-432
15	1210	1250	-32	-2592
16	1160	1220	-32	-4320
17	1100	1190	-33	-6480
18	1000	1150	-46	-10368
19	950	1100	-50	-12960
20	900	1040	-59	-12528
21	790	980	-65	-14256
22	710	920	-62	-17280
23	650	860	-60	-18144
24	590	790	-69	-17712
25	510	710	-80	-17280
26	450	650	-60	-17280
27	380	590	-61	-17712
28	300	510	-80	-18144
29	230	460	-52	-19008
30	180	410	-50	-19872

⦿ Attention !

Il faut remarquer que dans la relation (1), on utilise les débits entrants et sortants moyens, alors que dans la relation (2) on utilise les débits sortants et entrants instantanés.

Question 2. Condition de stabilité et pas de temps d'application

⦿ Méthode à appliquer : vérification des conditions de stabilité pour le calcul discrétisé

La méthode de Muskingum permet d'estimer le débit de sortie du bief O à l'instant $t+\Delta t$ en connaissant le débit d'entrée I à t et $t+\Delta t$, ainsi que le débit de sortie à l'instant t. Les coefficients multiplicatifs C_1, C_2 et C_3 associés à ces trois débits sont strictement positifs et leur somme est égale à l'unité. Pour respecter ces conditions, la relation de Muskingum sous sa forme discrétisée doit remplir la condition suivante :

$$\Delta t > 2 \cdot K \cdot X$$

Δt : pas de temps de calcul, en [s]

K : temps de propagation de l'onde de crue dans le bief, en [s]

X :facteur de pondération, adimensionnel

De plus, si l'on souhaite que K donne une idée du transfert de la crue, il faut encore que $\Delta t / K < 1$.

Ainsi, la méthode de Muskingum est applicable pour un pas de temps compris entre les valeurs $2KX$ et K.

⦿ Résultats :

Dans le cas présent le pas de temps Δt de calcul (1 jour) est bien strictement supérieur à $2 \cdot K \cdot X$ (9.95 heures), la condition de stabilité de la méthode est donc remplie ce qui permettrait l'utilisation des valeurs de X et K pour l'acheminement d'hydrogrammes dans le bief.

Pour les pas de temps possibles, on a l'intervalle suivant : 9.95 h< Δt < 49.9 h (+ de 2 jours).

Question 3. Modification du coefficient de Manning

L'effet d'une augmentation du coefficient de Manning n se traduirait par une augmentation de la rugosité du canal, et donc par une diminution de la vitesse de l'onde de crue : en se déplaçant moins rapidement, l'atténuation du débit de pointe serait plus importante ce qui aurait pour effet une diminution de la valeur du paramètre X.

Question 4. Estimation du paramètre K de Muskingum uniquement à l'aide de l'hydrogramme entrant dans le bief

⦿ Méthode à appliquer : Calcul de la vitesse de l'écoulement

Comme le paramètre K peut être assimilé en première approximation au temps de parcours de la crue dans le bief, une estimation couramment utilisée de K revient à utiliser la vitesse de l'écoulement dans le bief et la longueur de celui-ci. On a alors :

$$K = \frac{\Delta x}{U} \tag{3}$$

En utilisant la formule de Manning-Strickler (cf. relation (4)) et connaissant l'hydrogramme entrant dans le bief, il est aisé de calculer la hauteur d'eau dans le canal pour chaque débit[1] (largeur du canal donnée) et ainsi la vitesse de l'écoulement.

La loi de frottement empirique en général donnée par la relation de Manning-Strickler s'écrit :

[1] Dans la relation (5), il y a une seule inconnue la hauteur du canal h de la section amont (on connaît Q). Cette hauteur rentre en compte dans le calcul du rayon hydraulique R_h et de la surface de la section S.

$$U = \frac{1}{n} \cdot R_h^{2/3} \cdot J_f^{1/2} \qquad (4)$$

d'où $$Q = U \cdot S = \frac{1}{n} \cdot R_h^{2/3} \cdot J_f^{1/2} \cdot S \qquad (5)$$

Avec Q le débit [m^3/s], U la vitesse moyenne [m/s], R_h le rayon hydraulique [m], J_f la Pente du fond [-], S la surface de la section [m] et n le coefficient de Manning [m$^{-1/3}$/s].

La vitesse de l'écoulement se calcule soit à partir du débit maximal (méthode américaine), soit en faisant une moyenne pondérée des débits (méthode française) :

$$U = \frac{Q_{\max}}{A_{\max}} \text{ (méthode américaine)} \qquad (6)$$

$$U_i = \frac{Q_i}{A_i} \Rightarrow U = \frac{\sum_i Q_i U_i}{\sum_i Q_i} \text{ (méthode française)} \qquad (7)$$

☉ Démarche et résultats :

Etape 1 : calcul de la hauteur d'eau h dans le canal pour chaque débit par itération en appliquant la formule de Manning-Strickler (relation (4)). Pour chaque pas de temps, on fixe une valeur de h jusqu'à ce que le calcul du débit simulé à l'aide de l'équation (5) soit égal au débit observé. Cette opération peut être facilitée par l'utilisation du solveur d'Excel.

Exemple :

- Au pas de temps t= 1, Q_1=180 m3/s
- On fixe au hasard h= 1.5 m
- On calcul Q_1 simulé : $Q_1 = \frac{1}{0.030} \cdot \left(\frac{1.5 \times 60}{2 \times 1.5 + 60} \right)^{2/3} \cdot 0.3^{1/2} \cdot (1.5 \times 60) = 208.4 \text{ m}^3$
- On compare Q_1 observé et Q_1 simulé : $180 \neq 208.4$
- On fixe une nouvelle valeur de h jusqu'à tomber sur les mêmes valeurs pour les débits observé et simulé. On tombe sur h~ 1.37 m pour t=1.
- Etc…

Etape 2 : Pour chaque pas de temps, calcul des vitesses instantanées à partir des valeurs de débit entrant observé et des hauteurs d'eau dans le bief précédemment calculées (*U=Q/S avec S=h.60*). (cf. tableau 2).

Etape 3 : Calcul de la vitesse moyenne de l'écoulement soit par le méthode » française soit pat la méthode « américaine ».

- Méthode « française» : on calcul la vitesse pondérée par les débits.

$$U = \frac{\sum_i Q_i U_i}{\sum_i Q_i} \simeq \frac{106277}{25310} \simeq 4.20 \quad \text{m/s}$$

- Méthode « américaine». La vitesse est égale au débit maximal divisé par la section correspondante de l'écoulement.

$$U = \frac{Q_{\max}}{A_{\max}} = \frac{1390}{4.88 \times 60} \simeq 4.75 \quad \text{m/s}$$

Etape 4 : Calcul du paramètre K (équation (3)).

- A partir de la méthode « française» :

$$K = \frac{\Delta x}{U} = \frac{\frac{800\ 10^3}{4.20}}{60 \times 60} \simeq 52.9 \ \text{min}$$

- A partir de la méthode « américaine».

$$K = \frac{\Delta x}{U} = \frac{\frac{800\ 10^3}{4.75}}{60 \times 60} \simeq 46.8 \ \text{min}$$

Tableau 2 : Profondeur et vitesse de l'écoulement pour les débits entrants dans le bief

Temps *[jour]*	***Débit entrant*** *[m^3/s]*	***Profondeur de l'écoulement*** *[m]*	***Vitesse de l'écoulement*** *[m/s]*
1	180	1.37	2.2
2	270	1.76	2.6
3	420	2.31	3.0
4	650	3.02	3.6
5	890	3.68	4.0
6	1100	4.21	4.4
7	1270	4.61	4.6
8	1360	4.81	4.7
9	1380	4.86	4.7
10	1390	4.88	4.7
11	1370	4.83	4.7
12	1350	4.79	4.7
13	1310	4.70	4.6
14	1260	4.58	4.6
15	1210	4.47	4.5
16	1160	4.35	4.4
17	1100	4.21	4.4
18	1000	3.96	4.2
19	950	3.84	4.1
20	900	3.71	4.0
21	790	3.42	3.9
22	710	3.20	3.7
23	650	3.02	3.6
24	590	2.85	3.5
25	510	2.60	3.3
26	450	2.41	3.1
27	380	2.17	2.9
28	300	1.88	2.7
29	230	1.59	2.4
30	180	1.37	2.2