ÉCOLE POLYTECHNIQUE
FÉDÉRALE DE LAUSANNE

Exercice n° HA 0505 - Corrigé

Propagation d'une crue - Acheminement par la méthode de Muskingum et des ondes cinématiques

Données de l'exercice :

Les caractéristiques du tronçon de canal en terre étudié sont résumées dans le tableau 1-énoncé et celles des l'hydrogrammes entrant et sortant du bief dans le tableau 2-énoncé. La crue de projet à acheminer est aussi dans le tableau 2-énoncé. Les données de cet exercice sont aussi regroupées dans le fichier Excel « HA0505_enonce.xls ». Une série de feuilles de calcul à compléter est également disponible dans le fichier Excel « HA0505_feuilledecalcul.xls ».

Le corrigé de l'exercice se trouve également dans le document Excel « HA0505_corrige.xls ».

Question 1. Détermination des paramètres de Muskingum

⦿ Méthode à appliquer : Détermination des paramètres *K* et *X* par la méthode graphique

Si l'on dispose des hydrogrammes amont et aval du bief étudié, l'estimation des paramètres de Muskingum peut être faite par la méthode graphique. Celle-ci repose sur deux formulations de la variation du volume d'eau stockée dans le bief entre les temps *t* et $t+\Delta t$, à savoir la variation de volume d'eau moyen (équation 1) et la variation de volume instantané (équation 2).

$$\Delta S_{t+\Delta t} = S_{t+\Delta t} - S_t = \left(\left(\frac{I_t + I_{t+\Delta t}}{2} \right) - \left(\frac{O_t + O_{t+\Delta t}}{2} \right) \right) \cdot \Delta t \qquad (1)$$

$$S_{t+\Delta t} - S_t = K \cdot \left(X \left(I_{t+\Delta t} - I_t \right) + (1-X)\left(O_{t+\Delta t} - O_t \right) \right) = K \cdot D_{t+\Delta t} \qquad (2)$$

$$\text{D'où : } D_{t+\Delta t} = \frac{1}{K} \cdot \Delta S_{t+\Delta t} \qquad (3)$$

avec

$\Delta_{t+\Delta t}$: variation du stockage à l'instant $t+\Delta t$, en [m^3],
$D_{t+\Delta t}$: vidange pondérée à l'instant $t+\Delta t$, en [m^3/s],
S_t, $S_{t+\Delta t}$: volume d'eau stocké dans le bief à l'instant *t* et $t+\Delta t$, en [m^3],
O_t, $O_{t+\Delta t}$: débit sortant (« *Outflow* ») du bief à l'instant *t* et $t+\Delta t$, en [m^3/s],
I_t, $I_{t+\Delta t}$: débit entrant (« *Inflow* ») dans le bief à l'instant *t* et $t+\Delta t$, en [m^3/s],
Δt :pas de temps de calcul, en [s],
K : temps de propagation de l'onde de crue dans le bief, en [s],
X : facteur de pondération, adimensionnel.

L'équation (3) est une expression linéaire et on peut dès lors tracer la courbe du débit pondéré ou vidange pondérée $D_{t+\Delta t}$ transitant dans le bief à l'instant $t+\Delta t$ en fonction de la variation de volume d'eau correspondant $\Delta S_{t+\Delta t}$. La pente de cette droite vaut $1/K$.

La détermination de la valeur optimale des paramètres *X* et *K* peut se faire graphiquement et est obtenue lorsque les couples $\left(\Delta S_{t+\Delta t}, D_{t+\Delta t}\right)$, s'alignent au-mieux selon cette droite.

⊙ Démarche et résultats :

Etape 1 : choix d'un pas d'itération Δt.

Les données sont au pas de temps de 2 min, le pas d'itération Δt est choisi dans un premier temps égal à 2 min. Il faudra vérifier s'il respecte les contraintes de stabilité numérique.

Etape 2 : choix d'une valeur de X

Le facteur de pondération X est normalement compris entre 0 et 1, mais l'expérience montre qu'en générale X est compris entre 0,2 et 0,3. Cependant, pour illustrer les conséquences du choix de X, on choisit de tester les valeurs de X entre 0,1 et 0,5 dans cet exercice. On peut par exemple commencer par X=0,1.

Les résultats présentés ici sont pour X=0.3

Etape 3 : calcul du terme de vidange pondérée $D_{t+\delta t} = \left(X\left(I_{t+\Delta t} - I_t\right) + (1-X)\left(O_{t+\Delta t} - O_t\right)\right)$ pour chaque pas de temps à partir des valeurs instantanées des débits entrant et sortant au pas de temps t et de la valeur de X choisie.

- Au pas de temps t= 1, D_0=0 [m^3/s]
- Au pas de temps t= 2,

$$D_2 = 0.3\left(I_2 - I_1\right) + \left(O_2 - O_1\right)\left(1-0.3\right) = 0.3\left(8.25-8.25\right) + (1-0.3)\left(8.25-8.25\right) = 0 \ \mathrm{m}^3/s$$

etc…

Etape 4 : Calcul de la variation du volume d'eau stocké dans le bief pour chaque pas de temps à partir des débits moyens calculés entre les temps $t=j$ et $t=j+1$ selon l'équation (1).

- Au pas de temps t= 1, ΔS_1=0
- Au pas de temps t= 2,

$$\Delta S_2 = \left(\left(\frac{I_1 + I_2}{2}\right) - \left(\frac{O_1 + O_2}{2}\right)\right) \cdot 60 = \left(\left(\frac{8.25+8.25}{2}\right) - \left(\frac{8.25+8.25}{2}\right)\right) \cdot 60 = 0 \ \mathrm{m}^3$$

ect…

Etape 5 : représentation graphique des couples $\left(\Delta S_{t+\Delta t}, D_{t+\Delta t}\right)$ calculés aux points précédents (Figure 1, pour X=0.3).

Etape 6 : estimation de la qualité de l'ajustement de ces couples par rapport à une droite.

Le plus simple est de calculer le coefficient de corrélation R^2 entre les couples $\left(\Delta S_{t+\Delta t}, D_{t+\Delta t}\right)$ et la droite de régression associée.

Etape 7 : choix d'une nouvelle valeur de X si l'ajustement obtenu n'est pas correct (retour étape 2) ou si l'on veut tester de nouvelles valeurs de X. Ainsi les étapes 2 à 6 sont à répéter jusqu'à l'obtention de la meilleure valeur possible de R^2, qui est égale à l'unité pour un alignement parfait. Sinon, passer à l'étape 8.

Etape 8 : détermination de K.

- Pour cet exercice, on aboutit après plusieurs essais à une valeur optimale de X :

X= 0.30 (indice de détermination R égal à 0.99)

Signalons que la détermination de X ne nécessite pas une grande précision car les résultats ne sont que peu sensibles à la variation de ce paramètre.

- On calcul alors le paramètre K, qui n'est autre que l'inverse de la pente générale de la courbe formée par les points $\left(\Delta S_{t+\Delta t}, D_{t+\Delta t}\right)$: ***K*= 9,81 min**

☉ Attention !

Il faut remarquer que dans la relation (1), on utilise les débits entrants et sortants moyens, alors que dans la relation (2) on utilise les débits sortants et entrants instantanés.

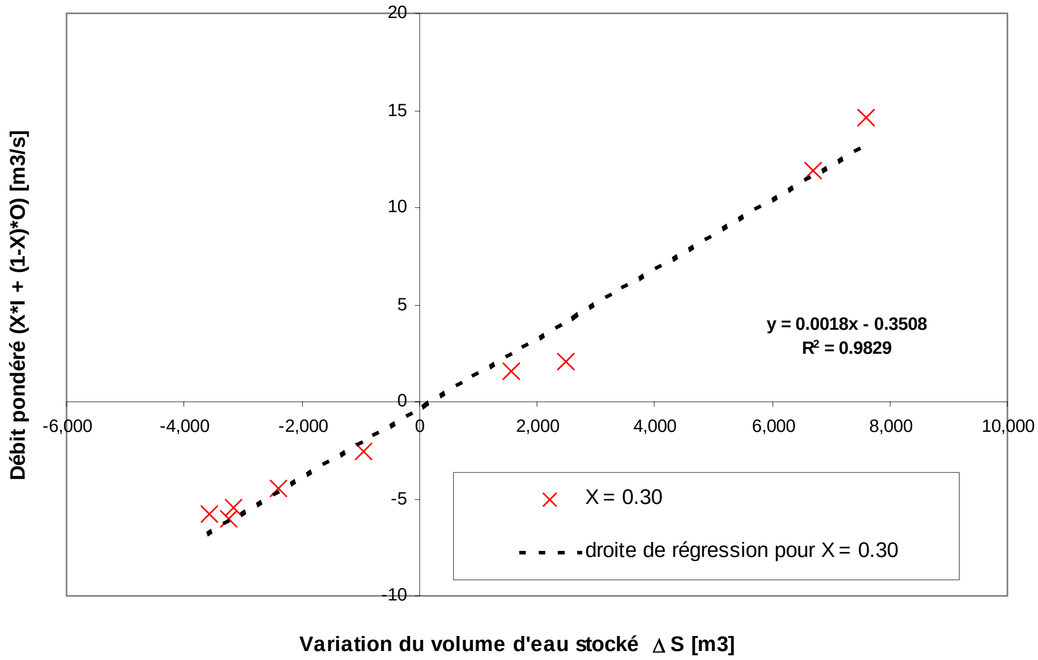

Figure 1 : Représentation du débit pondéré en fonction de la variation de stock dans le bief pour une valeur du paramètre X = 0.3 et Δt = *2 min.*

Question 2. Conditions de stabilité et domaine d'application

☉ Méthode à appliquer : vérification des conditions de stabilité pour le calcul discrétisé

La méthode de Muskingum permet d'estimer le débit de sortie du bief O à l'instant $t+\Delta t$ en connaissant le débit d'entrée I à t et $t+\Delta t$, ainsi que le débit de sortie à l'instant t. Les coefficients multiplicatifs C_1, C_2 et C_3 associés à ces trois débits sont strictement positifs et leur somme est égale à l'unité. Pour respecter ces conditions, la relation de Muskingum sous sa forme discrétisée doit remplir les deux conditions suivantes :

$\Delta t > 2\,K\,X$	Δt : pas de temps de calcul, en [min]
et	K : temps de propagation de l'onde de crue dans le bief, en [min]
$\Delta t < K$	X :facteur de pondération, adimensionnel

☉ Démarche et Résultats :

Etape 1. Vérification des conditions de stabilité.

Dans le cas présent le pas de temps Δt de calcul (2 min) est inférieur à K (9.81 min), mais il est inférieur à 2 K X (5.89 min). La première condition de stabilité de la méthode ($\Delta t > 2\,K\,X$) n'est donc pas remplie ce qui ne permet pas l'utilisation des valeurs de X et K pour l'acheminement d'hydrogrammes dans le bief étudié.

Etape 2. Suggestions ?

- Si l'on veut quand même utiliser la méthode de Muskingum, on peut suggérer d'augmenter le pas de temps. Mais si l'on souhaite que K donne une idée du transfert de la crue, il faut encore que $\Delta t < K$. On peut prendre par exemple $\Delta t = 6$ minutes et refaire les calculs présentés dans la question 1 (cela marche aussi avec $\Delta t = 8$ ou 4 minutes).

On obtient alors la situation suivante (figure 2) : $\Delta t = 6$ [min], $X = 0.3$, $K = 9.72$ [min] et les critères de stabilité sont vérifiés : $2\,K\,X = 5.83$ [min] < 6 [min] et $K = 9.72$ [min] > 6 [min].

- Une autre solution est d'utiliser les ondes cinématiques pour acheminer la crue. Dans ce cas, il faut aussi vérifier le critère de stabilité de la solution des ondes cinématiques dans le canal étudié.

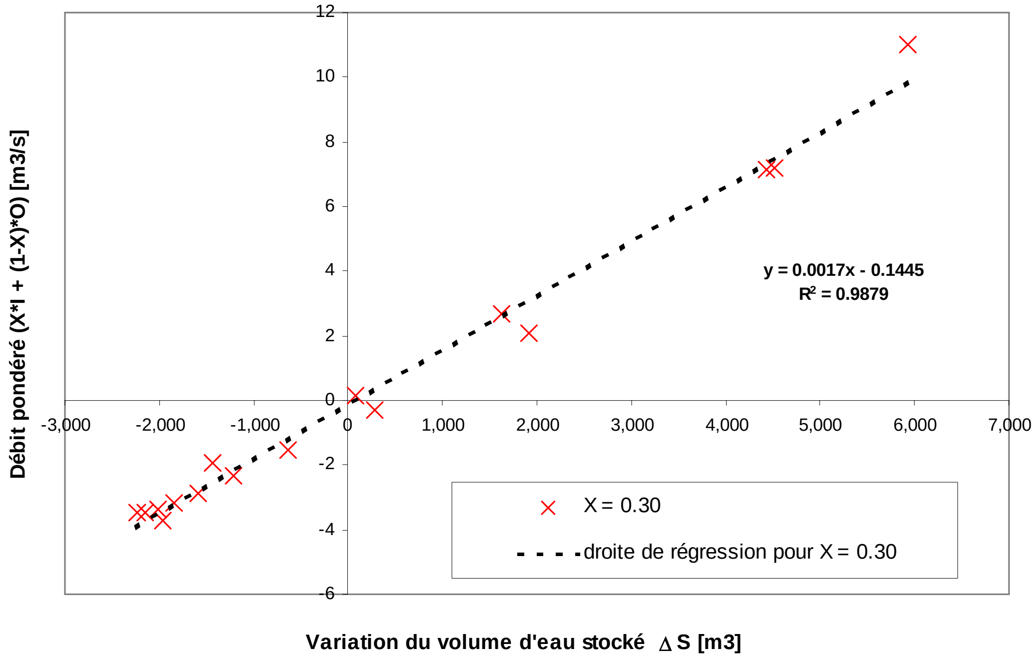

Figure 2 Représentation du débit pondéré en fonction de la variation de stock dans le bief pour une valeur du paramètre $X = 0.3$ et $\Delta t = 6$ min.

Question 3a. Acheminement de la crue de projet par la méthode de Muskingum (avec Δt=6 min)

⦿ Méthode à appliquer : Acheminement d'une crue par la méthode de Muskingum

Si les paramètres K et X sont connus et les critères d'application vérifiés (ils sont supposés constants sur la gamme de débits couverts par la crue), la méthode de Muskingum permet facilement de propager une crue vers l'aval.

Sous sa forme discrétisé, l'équation du modèle de Muskingum donnant le débit sortant O au pas de temps $j+1$ est :

$$C_1 = \frac{\Delta t - 2KX}{2K(1-X) + \Delta t}$$

$$O_{j+1} = C_1 \cdot I_{j+1} + C_2 \cdot I_j + C_3 \cdot O_j \qquad (4)$$

$$C_2 = \frac{\Delta t + 2KX}{2K(1-X)+\Delta t}$$

$$C_3 = \frac{2K(1-X)-\Delta t}{2K(1-X)+\Delta t}$$

Avec :

O_j, O_{j+1} : débits sortants (« *Outflow* ») du bief à l'instant j et $j+1$, en [m^3/s],

I_j, I_{j+1} : débits entrants (« *Inflow* ») dans le bief à l'instant j et $j+1$, en [m^3/s],

Δt :pas de temps de calcul, en [s],

K : temps de propagation de l'onde de crue dans le bief, en [s],

X : facteur de pondération, adimensionnel.

La condition initiale $O_1 = O(t_0) = I(t_0)$ est immédiate en admettant que l'écoulement soit en régime permanent avant la crue.

⦿ Démarche et résultats :

Etape 1 : calculer les coefficients C_1, C_2 et C_3 sachant que : Δt = 6 [min], X = 0.3, K = 9.72 [min]. On obtient : C_1, = 0.009 , C_2 = 0.61 et C_3 = 0.39. On vérifie bien que : $C_1+C_2+C_3$ =1.

Etape 2 : Conditions initiales (t=0 et j=1). On suppose que l'écoulement est en régime permanent avant la crue, ainsi : $O_1 = O(t_1) = I(t_1)$= 8.25 [m^3/s]

Etape 3 : Au pas de temps suivant ($t=t+\Delta t$ *et* $j=j+1$), calculer le débit sortant Q d'après l'équation (4).

Le résultat de l'acheminement de la crue de projet par la méthode de Muskingum (pour Δt=6 min) est présenté dans le tableau suivant et la figure 2.

temps [min]	**débit de projet (Point A)** [m3/s]	**débit Arrivée (point B)** [m3/s]
0	8.2	8.25
6	13.68	8.30
12	30.44	11.74
18	41.96	23.28
24	45.63	34.74
…	…	…

Question 3b. Acheminement de la crue par la méthode des ondes cinématiques (avec Δt=2 min)

⦿ Méthode à appliquer : Acheminement d'une crue par la méthode des ondes cinématiques

L'onde cinématique constitue un cas spécial et simplifié des équations de Saint-Venant (écoulement permanent et uniforme) où les termes d'inertie et le terme dû à la variation de la profondeur, donc de la pression, sont négligés.

- Le mouvement d'une onde cinématique est décrit par le système des ondes cinématiques que l'on peut exprimer sous la forme suivante :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial(US)}{\partial x} + B \cdot \dfrac{\partial h}{\partial t} = S \cdot \dfrac{\partial U}{\partial x} + U \cdot \dfrac{\partial S}{\partial x} + B \cdot \dfrac{\partial h}{\partial t} = 0 \text{ (équation de continuité)} \\ J_f = J_e \text{ (équation d'onde cinématique)} \end{cases} \quad (5)$$

Avec :

h : énergie de pression (qui est égale à la hauteur d'eau) [m]
U : vitesse moyenne [m/s]
S : surface mouillée [m^2],
B *:* largeur du canal [m],
J_e *: pente énergétique [-],*
J_f : pente du fond du canal [-].

- Une onde cinématique est principalement décrite par l'équation de continuité. Elle est générée par la variation de débit Q, et sa célérité c_k , est donnée par :

$$c_k = \frac{\partial Q}{\partial S} = \frac{1}{B} \cdot \frac{\partial Q}{\partial h} \quad (6)$$

- Dans le cas d'un canal prismatique quelconque (peu large) et avec l'expression de *Q(h)* tirée de Manning (équation 7), l'expression pour la célérité de l'onde cinématique (équation 8) peut s'écrire (avec n : coefficient de Manning [m$^{-1/3}$/s]) :

$$Q = \frac{J_f^{1/2} \cdot B^{5/3}}{n} \cdot \frac{h^{5/3}}{(B + 2 \cdot h)^{2/3}} \quad (7)$$

$$c_k = \frac{J_f^{1/2} \cdot B^{2/3}}{n} \cdot \left[\frac{h^{2/3} \cdot (5 \cdot B + 6 \cdot h)}{3 \cdot (B + 2 \cdot h)^{5/3}} \right] \quad (8)$$

- Dans cette équation, la profondeur h est calculée par itérations successives (recherche par tâtonnement) de manière à ce que, pour chaque pas de temps, la relation $Q_{Observé} = Q_{simulé}$ (avec équation 7) soit vérifiée. Une fonction d'Excel (SOLVEUR) permet de trouver rapidement la valeur de h pour un débit individuel. Dans le fichier Excel « HA0505_corrige.xls », vous disposez aussi d'une routine permettant d'utiliser le serveur sur une boucle.

- On considère encore que l'onde cinématique constitue une bonne approximation de l'onde dynamique si le critère suivant est respecté :

$$\frac{g \cdot L \cdot J_f}{U^2} > 10 \quad (9)$$

Avec : g l'accélération terrestre [m/s^2], L la longueur du canal étudié [m], J_f la pente du fond du canal [-] et U la vitesse moyenne [m/s].

⦿ Démarche et résultats :

Etape 1 : Calcul de la hauteur normale. En utilisant « solveur » ou « valeur cible » on trouve h=1.2 pour le débit initial de 8.25 m^3/s :

$$Q_0 = \frac{0.001^{1/2} \cdot 5^{5/3}}{0.02} \cdot \frac{1.2^{5/3}}{(5+2\cdot 1.2)^{2/3}} = 8.25 \quad [\mathrm{m^3/s}]$$

Etape 2 : Vérification du critère d'application de l'onde cinématique

- En utilisant la formule (9) ci-dessus, on vérifie si le critère d'application de l'onde cinématique est respecté.

Etape 3 : Propagation vers l'aval de chaque débit individuel avec sa propre célérité.

- Pour le débit initial Q_0. : la profondeur normale pour ce débit est connue h_0 =1.2 m. Sa célérité est calculée à l'aide de l'expression (8) :

$$c_k = \frac{0.001^{1/2} \cdot 5^{2/3}}{0.02} \cdot \left[\frac{1.2^{2/3} \cdot (5\cdot 5 + 6\cdot 1.2)}{3\cdot (5+2\cdot 1.2)^{5/3}} \right] = 1.99 \ [\mathrm{m/s}]$$

Ce débit initial (point A) est donc propagé vers la station du point B ($L_{A\text{-}B}$=3000 m) avec une célérité c_k=1.99 [m/s]. Le temps nécessaire à ce débit pour arriver en ce point B, appelé *temps de parcours* Δt, se calcule simplement par :

$\Delta t = L_{A\text{-}B} / c_k =$ 1504 [s]

On ajoute donc le temps de parcours Δt au temps de départ (t_A=0) pour déterminer *le temps d'arrivée* au point B.

Pour les débits individuels suivants. La procédure de calcul est la même.

Le critère d'application de l'onde cinématique n'est plus respecté à partir de 8 minutes (tableau suivant). Les hydrogrammes acheminés sont comparés dans la figure 2.

temps	temps départ	débit de projet (Point A)	Hauteur normale	Rayon Hydraulique*	Vitesse d'écoulement uniforme	critère application onde cinem.	Satisfait?	débit Arrivée (point B)
[min]	[s]	[m3/s]	[m]	[m]	[m/s]			[m3/s]
0	0	8.25	1.20	0.81	1.37	15.6	ok	8.25
2	120	8.25	1.20	0.81	1.37	15.6	ok	8.25
4	240	9.41	1.31	0.86	1.43	14.4	ok	9.41
6	360	13.68	1.71	1.02	1.60	11.5	ok	13.68
8	480	21.81	2.41	1.23	1.81	9.0	NON	21.81
10	600	24.63	2.64	1.28	1.87	8.4	NON	24.63
…	…	…	…	…	…	…	…	…

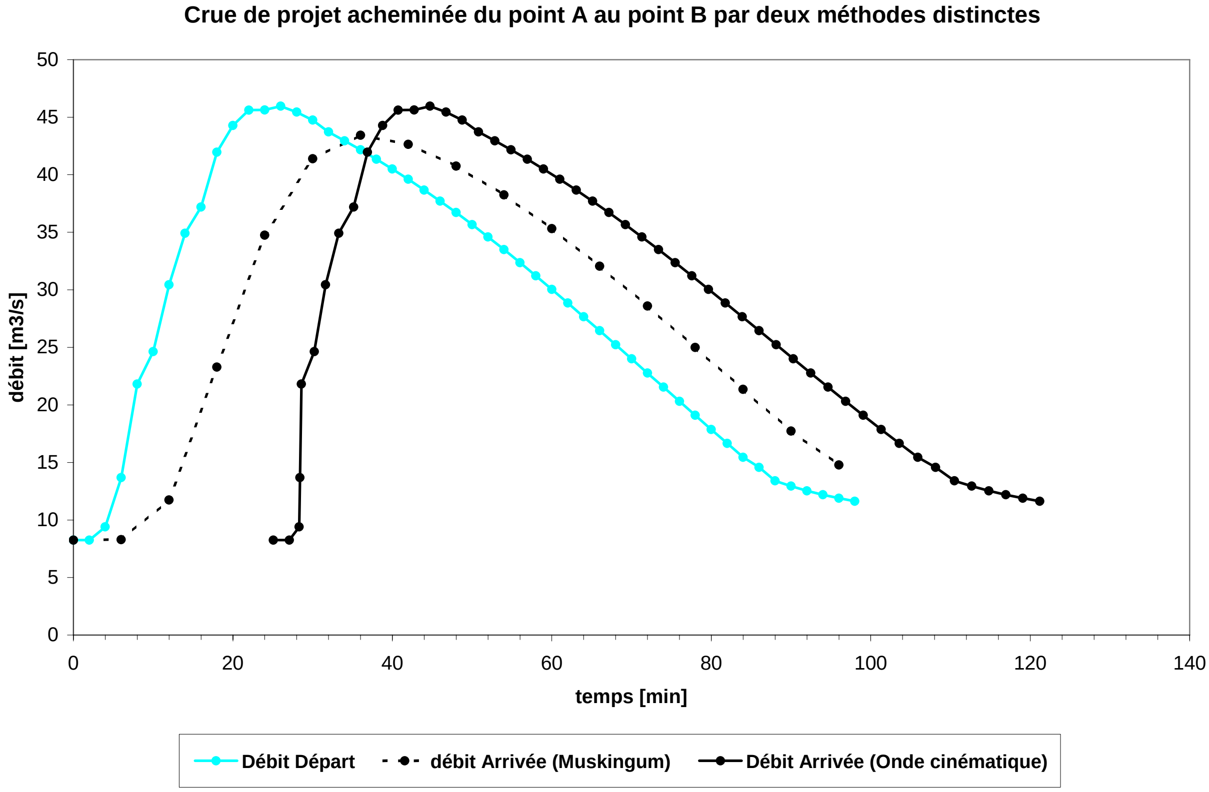

Figure 2. Résultat de l'acheminement de la crue de projet par : 1) la méthode de Muskingum (Δt=6min), 2) les ondes cinématiques.