

Exercice n° HA 0506 - Corrigé

Dimensionnement pour le laminage de crue d'une retenue située en amont d'une zone fortement urbanisée – Application de la méthode de la « Storage Indication Curve »

Données de l'exercice :

L'exercice porte sur le dimensionnement d'une retenue, de relation hauteur/volume stocké connue (Figure 1-énoncé), de manière à ce que le débit de pointe de l'hydrogramme laminé soit égal au débit objectif $Q_p=2.5 \text{ m}^3/\text{s}$. Les données de cet exercice sont aussi regroupées dans le fichier Excel « HA0506_enonce.xls ». Une série de feuilles de calcul à compléter est également disponible dans le fichier Excel « HA0506_feuillecalcul.xls ». Le corrigé de l'exercice se trouve également dans le document Excel « HA0506_corrige.xls ».

Question 1. Première évaluation du diamètre de l'orifice de vidange de la retenue

Etape 1. Estimation du volume maximal à stocker.

Une première évaluation réaliste du diamètre de l'orifice est difficile. On se propose de la déterminer en estimant de manière grossière le volume de stockage nécessaire au laminage de la crue en appliquant l'équation de continuité aux débits entrant et sortant de la retenue :

$$\frac{dS(t)}{dt} = I(t) - O(t) \quad (1)$$

avec :

$S(t)$: volume d'eau stocké dans la retenue, en $[\text{m}^3]$

$I(t)$: débit entrant (« Inflow ») dans la retenue, en $[\text{m}^3/\text{s}]$

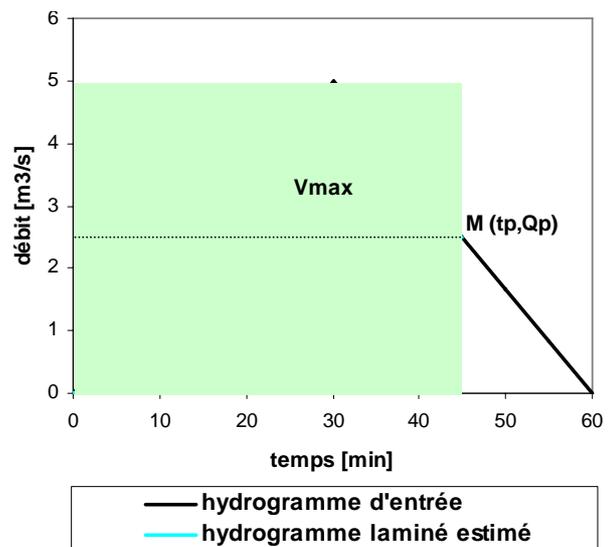
$O(t)$: débit sortant (« Outflow ») de la retenue, en $[\text{m}^3/\text{s}]$

Ainsi le volume d'eau est maximal lorsque le débit entrant O est égal au débit sortant I de la retenue (le point M de la figure ci-dessous qui correspond au débit de sortie admissible - $Q_s=2.5 \text{ m}^3/\text{s}$). Le volume d'eau maximal S_{max} est donc égal à :

$$S(t = t_p) = \int_{t=0}^{t=t_p} (I(t) - O(t)) \cdot dt \quad (2)$$

Il est alors possible d'estimer ce volume en faisant l'hypothèse que le débit de sortie varie linéairement entre les instants $t = 0$ et $t = t_p$: il en découle une valeur de 4500 m^3 .

Etape 2. Estimation de la hauteur d'eau maximale. D'après la loi Hauteur /Volume de l'énoncé, on peut par itérations successives connaître la hauteur du plan d'eau correspondant au volume maximal à stocker. On obtient : $H_{max} = 2.5 \text{ mètres}$.



Etape 3. Estimation du diamètre de l'orifice circulaire de vidange.

Pour un réservoir dont le rapport surface – profondeur est grand, l'équation de Bernoulli permet d'exprimer le débit pour un orifice circulaire selon la formule :

$$O(t) = C_c \cdot \left(\frac{\pi \pi \cdot D^2}{4} \right) \cdot \sqrt{2 \cdot g \cdot H} \quad (3)$$

avec :

C_c : coefficient de contraction (estimé à 0.8), adimensionnel

D : diamètre de l'orifice de vidange, en [m]

H : hauteur d'eau mesurée à partir du centre de l'orifice, en [m]

Il est à noter que la formule ci-dessus est théoriquement valable pour $H \gg D$ et lorsque l'orifice de vidange fonctionne en régime dénoyé.

Il suffit donc d'ajuster par itérations successives la valeur du diamètre de l'orifice de manière à ce que le débit de vidange, calculé à l'aide de l'équation de vidange, soit égal à 2.5 m³/s pour la hauteur H_{max} précédente.

On obtient : $D_I = 0.75$ [m].

⊙ Attention !

On fait l'hypothèse simplificatrice que la hauteur H est la même pour toutes les équations (H=h), et est définie comme la hauteur d'eau derrière la retenue depuis le centre de l'orifice.

Question 2. Validation du diamètre D_I à l'aide de la méthode de la « Storage Indication Curve ».

⊙ Méthode à appliquer : Méthode de la « Storage Indication Curve ».

La méthode de la « Storage Indication Curve » est une procédure de calcul qui permet d'obtenir l'hydrogramme sortant d'un réservoir connaissant l'hydrogramme entrant et les caractéristiques de vidange de ce réservoir. Elle repose sur la forme discrétisée de l'équation de continuité : la variation de stockage S entre deux instants $t=j$ et $t=j+1$ peut s'exprimer selon la relation (4) où O est le débit sortant, I le débit entrant et Δt le pas de temps :

$$S_{j+1} - S_j = \frac{I_j + I_{j+1}}{2} \Delta t - \frac{O_j + O_{j+1}}{2} \Delta t \quad (4)$$

L'expression (4) peut être réarranger de manière à isoler dans le terme de gauche les deux inconnues S_{j+1} et O_{j+1} :

$$\left(2 \frac{S_{j+1}}{\Delta t} + O_{j+1} \right) = (I_j + I_{j+1}) + \left(2 \frac{S_j}{\Delta t} - O_j \right) \quad (5)$$

Afin de calculer le débit sortant O_{j+1} de la relation (5), une courbe reliant le terme $2 S/\Delta t + O$ au débit sortant O est nécessaire. Cette courbe- Storage Indication Curve – qui donne son nom à la méthode, est construite en se basant sur la relation Hauteur-Volume du réservoir et sur sa loi de vidange : pour une hauteur d'eau donnée H_j , la relation Hauteur-Volume de la retenue permet de calculer le volume stocké dans la retenue S_j , et l'équation de vidange permet d'obtenir le débit de vidange sortant O_j .

Pour le calcul de la propagation de la crue à travers le réservoir dans l'intervalle j , tous les termes de droite de l'équation (5) sont connus, et la valeur de $2 S_{j+1} / \Delta t + O_{j+1}$ peut alors être calculer. La valeur correspondante de O_{j+1} peut être déterminée graphiquement ou numériquement grâce à la

« Storage Indication Curve ». Pour passer au pas de temps suivant, la valeur de $2 S_{j+1} / \Delta t - O_{j+1}$ est obtenue par le calcul suivant :

$$\left(2 \frac{S_{j+1}}{\Delta t} - O_{j+1} \right) = \left(2 \frac{S_j}{\Delta t} + O_j \right) - 2O_j \quad (6)$$

Le calcul est ensuite répété sur l'ensemble de la période de laminage.

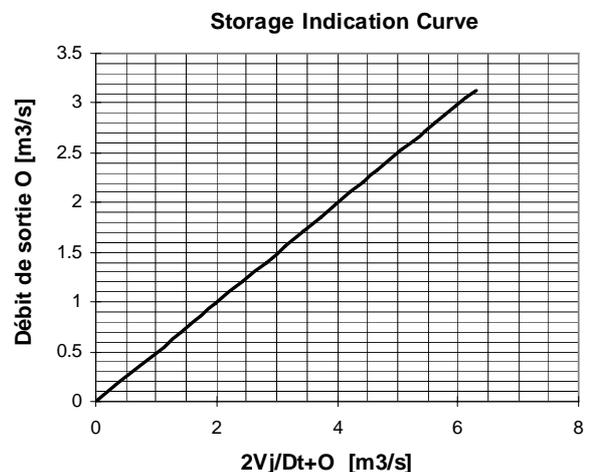
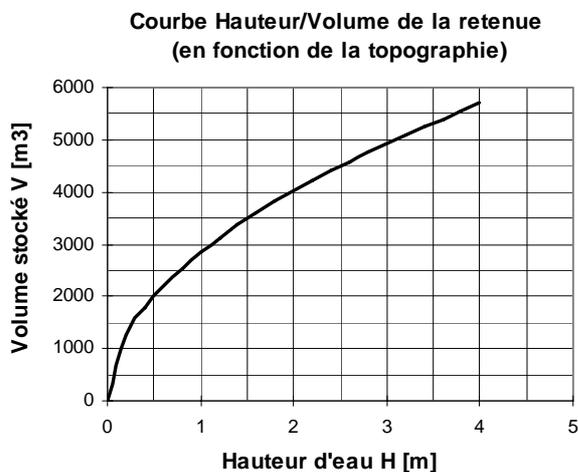
Rappel : Le principe de la méthode de la « Storage Indication curve » est résumé dans le tableau suivant (pour une hauteur initiale du plan d'eau nulle) :

Période j (1)	I_j (2)	$I_j + I_{j+1}$ (3)	$2 S_j / \Delta t - O_j$ (4)	$2 S_j / \Delta t + O_j$ (5)	O_j (6)
0	$I_0=0$	$0 + I_1$	$2 S_0 / \Delta t - O_0$	$2 S_0 / \Delta t + O_0$	O_0
	I_1	$I_1 + I_2$	$2 S_1 / \Delta t - O_1$	$2 S_1 / \Delta t + O_1$	O_1

Initialisation au pas de temps t=0

⊙ Démarche et résultats :

Etape 1 : Etablir la courbe Hauteur-Volume de la retenue d'après la relation Hauteur-Volume de la retenue donnée dans l'énoncé.



Etape 2 : Etablir la Storage Indication Curve :

- Calculer le volume S de la retenue [m^3] d'après H et la relation Hauteur-Volume de la retenue.
- Calculer le débit sortant O d'après la loi de vidange de l'ouvrage hydraulique et l'estimation du diamètre de l'orifice D_1 de la question 1.
- Calculer le terme $2 S / \Delta t + O$.
- Tracer la courbe $2 S / \Delta t + O$ versus O , c'est à dire, la Storage Indication Curve. Ce graphique permettra de trouver les valeurs du débit sortant à chaque pas de temps.

Etape 3 : Calculer l'hydrogramme laminé (le pas de temps $\Delta t = 5$ min)

- **Initialisation du calcul :** au temps initial t_0 ($j=0$), l'altitude du plan d'eau est $h=H=0$ [m] (simplification). Le volume stocké S_0 est nulle [m³]. Le débit entrant I_0 et le débit sortant O_0 sont nuls, puisque la crue n'est pas arrivée, d'où : $2 S_0/\Delta t + O_0=0$, $2 S_0/\Delta t - O_0=0$
- Pour le premier intervalle ($j=1$), on utilise la relation (5) et on obtient : $2 S_1/\Delta t + O_1 = 0,83 + 0 = 0,83$ [m³/s]. On peut en déduire la valeur de $O_1 = 0,06$ [m³/s] en lisant sur la « Storage Indication Curve » (SIC) et l'inscrire dans la colonne (6), puis on en déduit la valeur de $2 S_1/\Delta t - O_1 = 0,83 - (2 \times 0,06) = 0,71$ [m³/s] de la colonne (4) en utilisant la relation (6).

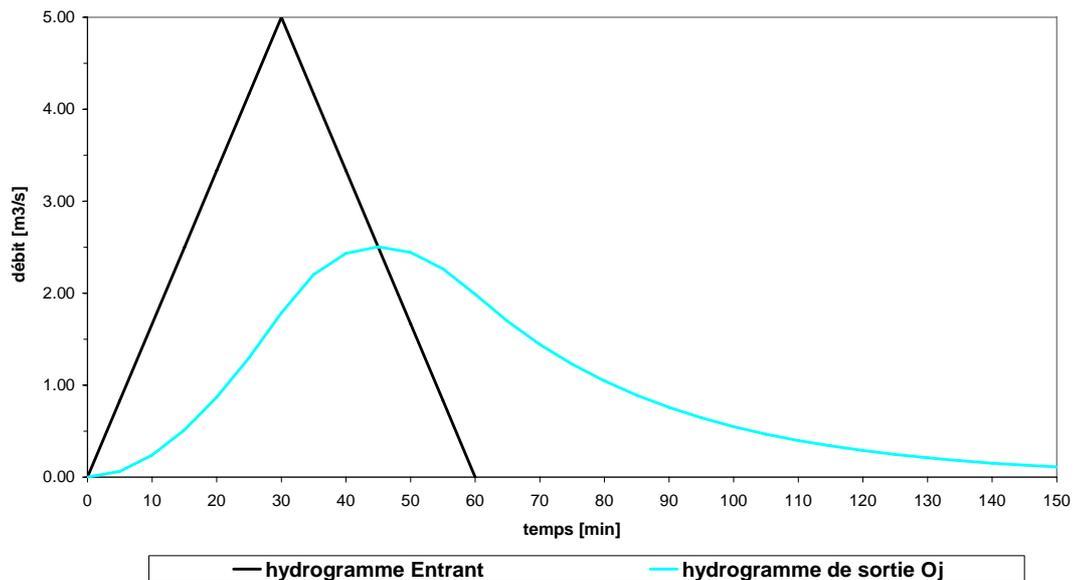
etc...

temps [min]	hydrogramme Entrant [m3/s]	I_j+I_{j+1} [m3/s]	$2S_j/\Delta t-O_j$ [m3/s]	$2S_j/\Delta t +O_j$ [m3/s]	hydrogramme de sortie O_j [m3/s]
0	0.00	0.83	0	0	0
5	0.83	2.50	0.71	0.83	0.06
10	1.67	4.17	2.72	3.21	0.24
15	2.50	5.83	5.83	6.88	0.52
20	3.33	7.50	9.89	11.67	0.89
...

Remarque : La valeur de O_j peut être lue directement (« visuellement ») sur la SIC ou calculer en utilisant une interpolation linéaire entre deux points de la SIC choisis de tel sorte que la valeur $2 S_j/\Delta t + O_j$ soit comprise dans cette intervalle (cf. corrigé sur le fichier Excel « HA0506_corrige.xls »).

- Tracer les deux hydrogrammes pour constater que le laminage abaisse le débit de pointe et le décale dans le temps (cf. figure ci-dessus). Cependant le débit de pointe obtenu à la sortie de la retenue de 2.54 m³/s après 45 minutes est supérieure à la limite fixée, il est donc nécessaire de diminuer le diamètre de l'orifice de vidange et de vérifier à nouveau que le débit de sortie soit inférieur à 2.5 m3/s.

Hydrogrammes d'entrée et allure de l'hydrogramme laminé à la sortie de la retenue (avec $D_2 = 0.74$ [m])



- Finalement un **diamètre de 0.74 [m]** permet de respecter le débit limite, ce qui engendre une hauteur du plan d'eau H de 2.70 [m] et nécessite le stockage de 4678 m³.