ÉCOLE POLYTECHNIQUE
FÉDÉRALE DE LAUSANNE

Exercice n° HA 0802 - Corrigé

Estimations du débit de pointe de temps de retour 20 et 100 ans par la méthode statistique et celle du GRADEX - Application au bassin versant de la Vière à Viège (VS, Suisse)

Données de l'exercice :

L'exercice porte sur le bassin versant de la Viège à Viège (778 km^2). Les données concernant les précipitations maximales journalières annuelles [en mm/24h] enregistrées de 1922 à 1955 à une station de la région (série de 34 ans de mesure) se trouvent dans le tableau I-énoncé-colonne 2. Les débits moyens maximaux journalier annuels [en m^3/s] et les débits de pointe correspondants [en m^3/s] enregistrés sur la Vièges de 1922 à 1964 (43 ans de mesure) sont présentés dans le tableau 1- énoncé, dans les colonnes 2 et 3.

Les données nécessaires à la réalisation de cet exercice sont aussi regroupées dans les fichiers Excel « HA0802_enonce.xls » ou « HA0802_feuilledecalcul.xls » (feuilles de calcul à compléter). Les résultats sont disponibles sur le fichier Excel « HA0802_corrige.xls ».

Question 1 : Estimation des débits de pointe de temps de retour 20 et 100 ans par *la méthode statistique – Méthode des Moments*

⦿ Méthode à appliquer : ajustement statistique d'une série de données -Gumbel

L'objectif de cet exercice est d'estimer les débits de pointes (débits maximaux) correspondants à un certain temps de retour, c'est-à-dire à une certaine probabilité d'apparition donnée.

L'analyse fréquentielle d'une longue série de débits maximaux permet d'estimer le temps de retour d'une valeur particulière. Cette prédiction repose sur la définition et la mise en œuvre d'un **modèle fréquentiel** qui est une équation décrivant (modélisant) le comportement statistique d'un processus. Ces modèles décrivent la **probabilité d'apparition** d'un événement de valeur donnée. C'est du choix du modèle fréquentiel (et plus particulièrement de son type) que dépendra la validité des résultats de l'analyse fréquentielle.

Un modèle fréquentiel très souvent utilisé pour décrire le comportement statistique des valeurs extrêmes est la distribution statistique de Gumbel (loi double exponentielle ou loi de Gumbel). La fonction de répartition de la loi de Gumbel *F(x)* s'exprime de la manière suivante :

$$F(x) = \exp\left(-\exp\left(-\frac{x-a}{b}\right)\right) \quad (1) \quad \text{avec la variable réduite suivante : } u = \frac{x-a}{b} \quad (2)$$

où a et b sont les paramètres du modèle de Gumbel.

La distribution s'écrit alors de la manière suivante :

$$F(x) = \exp(-\exp(-u)) \quad (3) \qquad \text{et } u = -\ln(-\ln(F(x))). \quad (4)$$

L'avantage d'utiliser la variable réduite est que l'expression d'un quantile est alors linéaire ($x_q = a + bu_q$).

En conséquence, dès lors que les points de la série à ajuster peuvent être reportés dans un système d'axes $x-u$, il est possible d'ajuster une droite qui passe le mieux par ces points et d'en déduire les deux paramètres a et b de la loi. L'estimation des paramètres a et b de l'ajustement peut se faire graphiquement (ajustement à l'œil ou à l'aide d'une régression statistique), ou selon une méthode mathématique comme celle des moments (cf. ci-dessous).

En pratique il s'agit essentiellement d'estimer la probabilité de non dépassement $F(x_i)$ qu'il convient d'attribuer à chaque valeur x_i. Il existe de nombreuses formules d'estimation de la fonction de répartition $\hat{F}(x)$ à l'aide de la fréquence empirique. Elles reposent toutes sur un tri de la série par valeurs croissantes permettant d'associer à chaque valeur son rang r. Des simulations ont montré que pour la loi de Gumbel, il faut utiliser la fréquence empirique de Hazen :

$$F\left(x_{[r]}\right) = \frac{r-0.5}{n} \qquad (5)$$

où r est le rang dans la série de données classée par valeurs croissantes, n est la taille de l'échantillon, $x_{[r]}$ la valeur de rang r.

Rappelons encore que le temps de retour T d'un événement est défini comme étant l'inverse de la fréquence d'apparition de l'événement. Soit :

$$T = \frac{1}{1-F_Q(x_Q)}. \qquad (6)$$

A l'aide de l'ajustement, il est alors possible d'estimer le débit de pointe pour un temps de retour donné.

⦿ Méthode à appliquer : Méthode des moments

La méthode des moments consiste à égaler les moments des échantillons avec les moments théoriques de la loi[1]. Par la méthode des moments les paramètres a et b sont calculés d'après les formules :

$$\begin{cases} \hat{b} = \dfrac{\sqrt{6}}{\pi}\hat{\sigma} \\ \hat{a} = \hat{\mu} - \hat{b}\gamma. \end{cases} \quad \text{avec } \gamma = 0.5772 \text{ (constante d'Euler).} \quad (7)$$

avec

σ : écart-type des valeurs composant l'échantillon.

μ : moyenne de l'échantillon.

Dès lors il est possible d'estimer les débits dont la représentation graphique est une droite d'équation :

$$\hat{Q} = \hat{a} + \hat{b} \cdot u \qquad (8)$$

avec

u: variable réduite (cf. équation (4)).

⦿ Démarche et résultats

Etape 1 : Préparation de la série de données des débits de pointe.

- Trier les valeurs dans l'ordre croissant.
- Attribuer un rang à chaque valeur.

[1] Autrement dit : la méthode des moments consiste à égaler les caractéristiques de la distribution (empirique) des échantillons avec les caractéristiques théoriques de la loi. Les caractéristiques utilisées pour décrire une distribution sont les moments dont les plus connus sont la moyenne et la variance (la moyenne d'une distribution est appelée premier moment, la variance est le deuxième moment). Les moments d'ordre plus élevés sont utiles pour caractériser d'autres aspects de la distribution. Le troisième moment est par exemple lié à l'asymétrie ou la dyssimétrie.

Etape 2 : Calcul de la fréquence empirique pour chaque rang (Hazen, équation (5)).

Etape 3 : Calcul de la variable réduite « u » du Gumbel (équation (4)).

Etape 4 : Représentation graphique des couples (u_i, x_i) de la série à ajuster (figure 1).

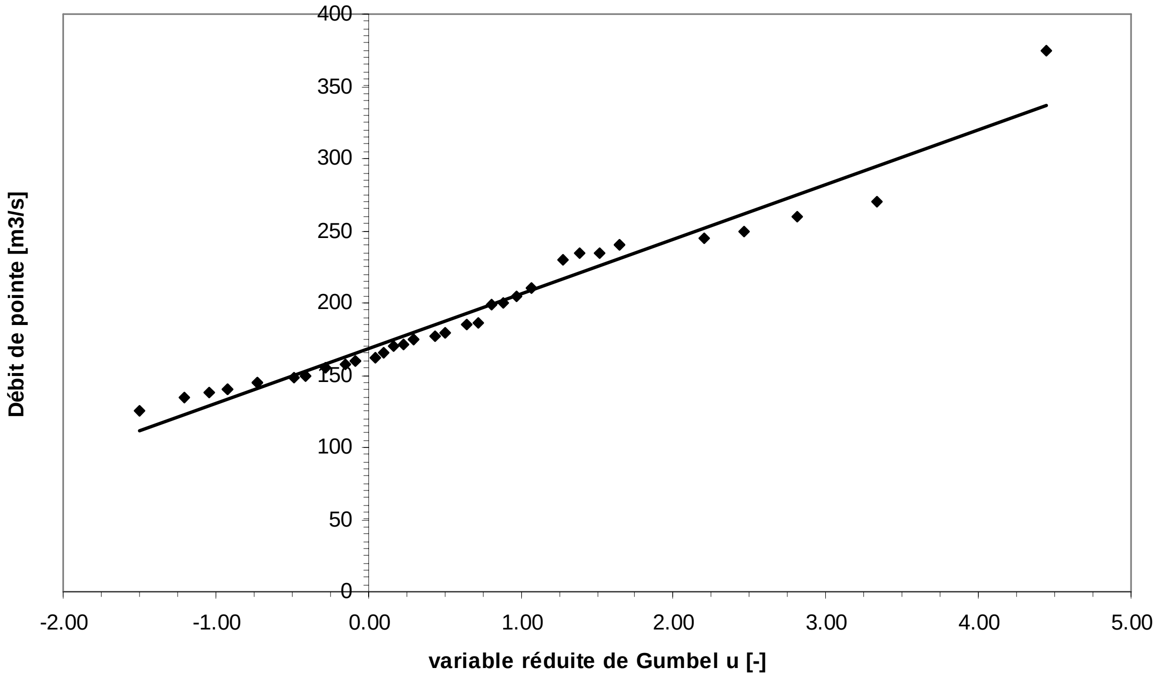


Figure 1. Ajustement graphique du modèle (calcul des paramètres « a » et « b » de la droite d'ajustement de Gumbel par la méthode des moments)

Etape 5 : Ajustement d'une relation linaire de type $x_q = a + bu_q$ aux couples (u_i, x_i) (figure 1). Avec un ajustement par la méthode des moments, on a alors pour ce premier ajustement une estimation des paramètres a_1 et b_1 :

$$a_1 = 167 \text{ et } b_1 = 38.2$$

Vérifier de manière visuelle l'ajustement.

Etape 6 : Utilisation du modèle statistique pour estimer des débits de pointe de différents temps de retour T. Par exemple pour T=100 ans, on suit les étapes suivantes :

- Calcul de la fréquence de non-dépassement d'après la relation (6) :

$$F(Q_p(T)) = 1 - \frac{1}{T} = 1 - \frac{1}{100} = 0,99$$

- Calcul de la variable réduite de Gumbel correspondante d'après la relation (4) :

$$u = -\ln\left(-\ln\left(F(Q_p(T))\right)\right) = -\ln\left(-\ln\left(0,99\right)\right) = 4,60$$

- Calcul du quantile correspondant d'après la relation linéaire (avec a et b fournis par l'étape 5 précédente) :

$$Q_p(100) = a_1 + b_1 \cdot u_{100} = 167 + 38.2 \cdot 0.99 = 342 \qquad \text{m}^3/\text{s}$$

On a de même pour T = 20 ans :

$$Q_p(20) = a_1 + b_1 \cdot u_{20} = 167 + 38.2 \cdot 0.95 = 280 \qquad \text{m}^3/\text{s}$$

Question 2 : Estimation des débits de pointe de temps de retour 20 et 100 ans par la méthode du *GRADEX*

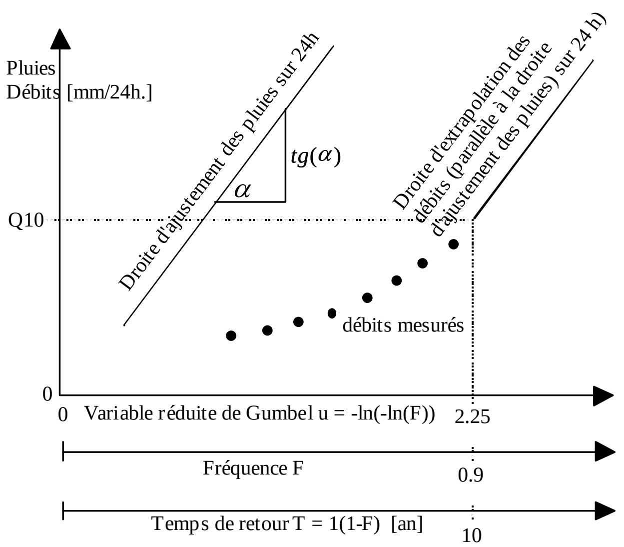
⦿ Méthode à appliquer : Méthode du GRADEX

La méthode du GRADEX a été conçue, mise au point, testée et validée par le groupe de recherche d'EDF[2] (Guillot and Duband, 1967). Elle a pour but de rechercher les débits maximaux de crues pour des fréquences d'apparition rares à très rares (temps de retour de plus de 100 ans). Elle s'applique notamment lorsque l'on dispose d'une longue série de pluie et d'une courte série de débit (env.10 ans) sur le bassin, et spécialement dans les régions de montagne.

Cette méthode s'appuie sur différentes hypothèses :

1. Les débits maximums recherchés sont provoqués uniquement par des pluies maximales, uniformément réparties sur le bassin.
2. Les pluies maximales et les débits correspondants (débits maximaux) suivent une même loi de distribution statistique, dite des "extrêmes" en raison de la nature du phénomène recherché (crues rares).
3. Ceci exprime surtout le fait qu'à partir d'une certaine valeur de pluie, le comportement asymptotique du débit sera identique à celui des pluies. Selon les auteurs de cette méthode, ce seuil représente le taux de saturation du bassin qui est atteint après un événement pluviométrique qui provoque un débit décennal (T = 10 ans).

La loi de Gumbel est souvent utilisée pour ajuster les séries de pluies maximales et les débits correspondants. Dans ce cas et dans ce cas uniquement, le caractère exponentiel de cette distribution est décrit par la pente de la droite d'ajustement des pluies observées. La pente de cette droite est le GRAdient de cette distribution Exponentielle, d'où le nom de la méthode GRADEX (figure ci-contre). La droite de distribution des débits est alors parallèle à partir du seuil, correspondant au temps de retour 10 ans, à celle des pluies.



L'application de la méthode du GRADEX implique plusieurs contraintes :

1. La durée des pluies considérées doit strictement correspondre à celle des débits (même Δt et en général 24 h). Elle est conditionnée par le temps de concentration des eaux du bassin au point d'intérêt.
2. Les unités des pluies et des débits doivent être identiques, si l'on procède à l'application de cette méthode en utilisant la loi de Gumbel (en mm/24h).
3. Les limites d'application de cette méthode sont conditionnées par des temps de concentration t_c variant de 1 heure à 4 jours. La méthode ne peut donc s'appliquer qu'à des bassins versants de 5000 km^2 au maximum.

Il convient encore de signaler que les résultats obtenus par extrapolation sont des débits maximaux moyens qui résultent de pluies maximales moyennes. Il s'agit donc de multiplier ces valeurs de débits par le coefficient de pointe moyen (coefficient de pointe=débit de pointe/débit moyen) pour obtenir le débit maximum instantané.

[2] Electricité De France

⦿ Démarche et résultats

Etape 1 : Ajustement des précipitations maximales journalières annuelles (série de 34 années de mesure) selon une distribution de Gumbel. Procéder comme dans la question 1.

Avec un ajustement par la méthode des moments, on a alors une estimation des paramètres a_2 et b_2 (a_2 = 33 et **b_2 = 13.2**) et on obtient une représentation graphique des couples (u_i, x_i) de la série des précipitations maximales journalières annuelles.

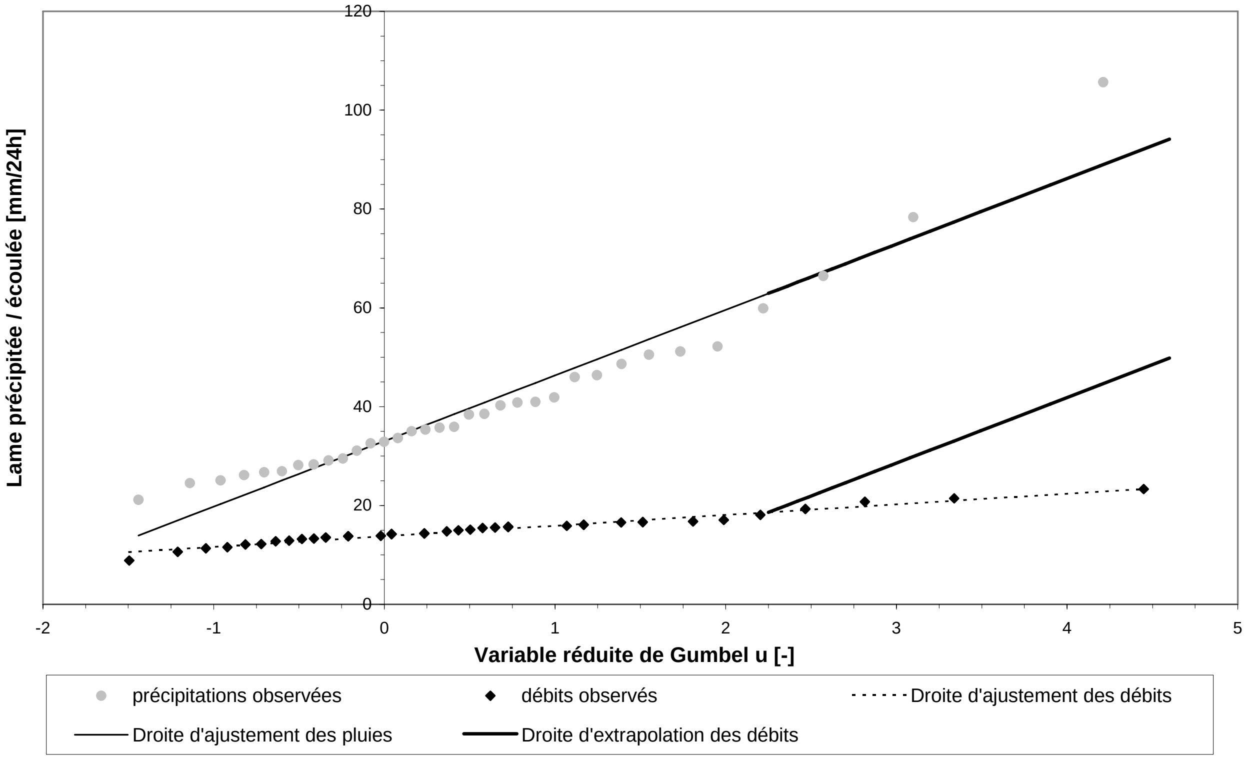
Etape 2 : Ajustement des débits moyens journaliers maximaux annuels (série de 43 années de mesure) selon une distribution de Gumbel. Après avoir transformé les [m^3/s] en [mm/24h] connaissant la surface du bassin (lame écoulée = Volume/Surface), procéder comme dans la question 1.

Avec un ajustement par la méthode des moments, on a alors une estimation des paramètres a_3 et b_3 (a_3 = 13.8 et b_3 = 2.2) et on obtient une représentation graphique des couples (u_i, x_i) de la série des précipitations maximales journalières annuelles.

Etape 3 : Déterminer les débits moyens maximaux de temps de retour 20 et 100 ans en appliquant la méthode du GRADEX et en utilisant le débit décennal comme point pivot.

- L'ajustement des précipitations selon la loi de Gumbel nous donne une pente de 13.2, qui est aussi la pente b_4 de la loi extrapolée des débits au-delà du point pivot.
- La valeur du paramètre a_4 est obtenue à partir des coordonnées du point correspondant à la fréquence de non-dépassement de 2.25 (i.e. T=10 ans) pour les débits.
- On obtient ainsi les paramètres a_4 et b_4 de la loi d'ajustement extrapolée des débits qui est parallèle à celle des pluies (figure ci-dessous).
- En appliquant cette formule pour les temps de retour de 20 et 100 ans, et en faisant la conversion adéquate pour avoir des valeurs en m^3/s, on obtient :

$Q_{(20)}$= 254 m^3/s et $Q_{(100)}$= 449 m^3/s



Etape 4 : Déterminer les débits de pointe de temps de retour 20 et 100 ans.

- Calcul du coefficient de pointe moyen *CF* à partir des différentes valeurs de débits moyens journaliers maximaux annuels et de débits de pointe. On obtient : *CF*=1.39 [-]

- Calcul des débits de pointe en multipliant les valeurs de débits trouvées précédemment par le *CF*. On obtient :

$Q_p(_{20})$= 323 m^3/s et $Q_p(_{100})$= 625 m^3/s

Question 3. Comparaison des méthodes d'estimation des débits de pointe

En comparant les résultats obtenus par un ajustement de Gumbel et par la méthode du GRADEX, on remarque que cette dernière donne des débits de pointe très importants (facteur de 1.3 et 1.8 par rapport à l'ajustement statistique).

Quelques commentaires peuvent être faits à propos des résultats :

- L'estimation du débit de pointe pour un temps retour de 100 ans par la méthode statistique est abusive. En effet l'estimation de processus par un ajustement statistique devrait se limiter à des temps de retour relativement « proches » du nombre d'années (une cinquantaine d'années dans le cas présent).

- Lors de l'application du GRADEX les données pluviométriques ne semblent pas s'ajuster de manière « satisfaisante » selon une loi à décroissance exponentielle (qui est l'une des hypothèses du GRADEX). L'ajustement de la série des précipitations à l'aide de deux segments de droite, dont la seconde passerait par les 5 plus grandes lames précipitées, n'est pas non plus une solution acceptable. Il faudrait donc choisir une loi d'ajustement plus appropriée, mais qui reste à définir.

- Pour la méthode du GRADEX, la variabilité du coefficient de pointe est très importante alors qu'elle devrait être proche de zéro pour les événements importants (cf. figure ci-dessous).

D'une manière générale la méthode du GRADEX est une solution intéressante pour l'estimation de crues rares voire extrêmes. Il ne faut cependant pas oublier de vérifier ses hypothèses, à savoir la loi d'ajustement des précipitations et la variabilité du coefficient de pointe, afin de statuer sur l'opportunité de sa mise en œuvre.