

Exercice n° HA 0808 - Corrigé

Prédétermination des débits de crue de fréquence rare par la méthode du GRADEX – Application au bassin versant du Mouhoun à Boromo (Burkina-Faso)

Données de l'exercice :

L'exercice porte sur le bassin versant du Mouhoun à Boromo dont les caractéristiques sont présentées dans le tableau 1-énoncé. Les données concernant les précipitations maximales journalières annuelles enregistrées de 1930 à 1975 se trouvent dans le tableau 2-énoncé. Les données nécessaires à la réalisation de cet exercice sont aussi regroupées dans le fichier Excel « HA0808_enonce.xls » ou dans le fichier Excel « HA0808_feuillecalcul.xls » qui est à compléter. Les résultats sont disponibles sur le fichier Excel « HA0808_corrige.xls ».

Question 1 : Calcul de la valeur du « GRADEX » des pluies journalières observées

La loi de Gumbel est souvent utilisée pour ajuster les séries de pluies maximales et les débits correspondants. Dans ce cas et dans ce cas uniquement, le caractère exponentiel de cette distribution est décrit par la pente de la droite d'ajustement des pluies observées. La pente de cette droite est le GRADIENT de cette distribution Exponentielle, d'où le nom de la méthode GRADEX.

Chercher le « GRADEX » des pluies journalières observées consiste donc à procéder à l'ajustement des valeurs maximales annuelles selon une distribution de Gumbel pour en déduire une estimation du paramètre b_1 de la droite d'ajustement $x_q = a + bu_q$ (avec u : variable réduite de Gumbel).

☉ Méthode à appliquer : ajustement statistique d'une série de données

Un modèle fréquentiel très souvent utilisé pour décrire le comportement statistique des valeurs extrêmes est la distribution statistique de Gumbel (loi double exponentielle ou loi de Gumbel). La fonction de répartition de la loi de Gumbel $F(x)$ s'exprime de la manière suivante :

$$F(x) = \exp\left(-\exp\left(-\frac{x-a}{b}\right)\right) \quad (1) \quad \text{avec la variable réduite suivante : } u = \frac{x-a}{b} \quad (2)$$

où a et b sont les paramètres du modèle de Gumbel.

La distribution s'écrit alors de la manière suivante :

$$F(x) = \exp(-\exp(-u)) \quad (3) \quad \text{et } u = -\ln(-\ln(F(x))). \quad (4)$$

L'avantage d'utiliser la variable réduite est que l'expression d'un quantile est alors linéaire ($x_q = a + bu_q$).

En conséquence, dès lors que les points de la série à ajuster peuvent être reportés dans un système d'axes $x-u$, il est possible d'ajuster une droite qui passe le mieux par ces points et d'en déduire les deux paramètres a et b de la loi. L'estimation des paramètres a et b de l'ajustement peut se faire graphiquement (ajustement à l'œil ou à l'aide d'une régression statistique), ou selon une méthode mathématique comme celle des moments.

En pratique il s'agit essentiellement d'estimer la probabilité de non dépassement $F(x_i)$ qu'il convient d'attribuer à chaque valeur x_i . Il existe de nombreuses formules d'estimation de la fonction de répartition $\hat{F}(x)$ à l'aide de la fréquence empirique. Elles reposent toutes sur un tri de la série par valeurs croissantes permettant d'associer à chaque valeur son rang r . Des simulations ont montré que pour la loi de Gumbel, il faut utiliser la fréquence empirique de Hazen :

$$F(x_{[r]}) = \frac{r-0.5}{n} \quad (5)$$

où r est le rang dans la série de données classée par valeurs croissantes, n est la taille de l'échantillon, $x_{[r]}$ la valeur de rang r .

Rappelons encore que le temps de retour T d'un événement est défini comme étant l'inverse de la fréquence d'apparition de l'événement. Soit :

$$T = \frac{1}{1 - F_Q(x_Q)} \quad (6)$$

A l'aide de l'ajustement, il est alors possible d'estimer la pluie maximale pour un temps de retour donné.

⊙ Démarche et résultats

Étape 1 : Préparation de la série de données des précipitations maximales journalières annuelles de pointe.

- Trier les valeurs dans l'ordre croissant.
- Attribuer un rang à chaque valeur.

Étape 2 : Calcul de la fréquence empirique pour chaque rang (Hazen, équation (5)).

Étape 3 : Calcul de la variable réduite « u » du Gumbel (équation (4)).

Étape 4 : Représentation graphique des couples (u_i, x_i) de la série à ajuster (figure 1).

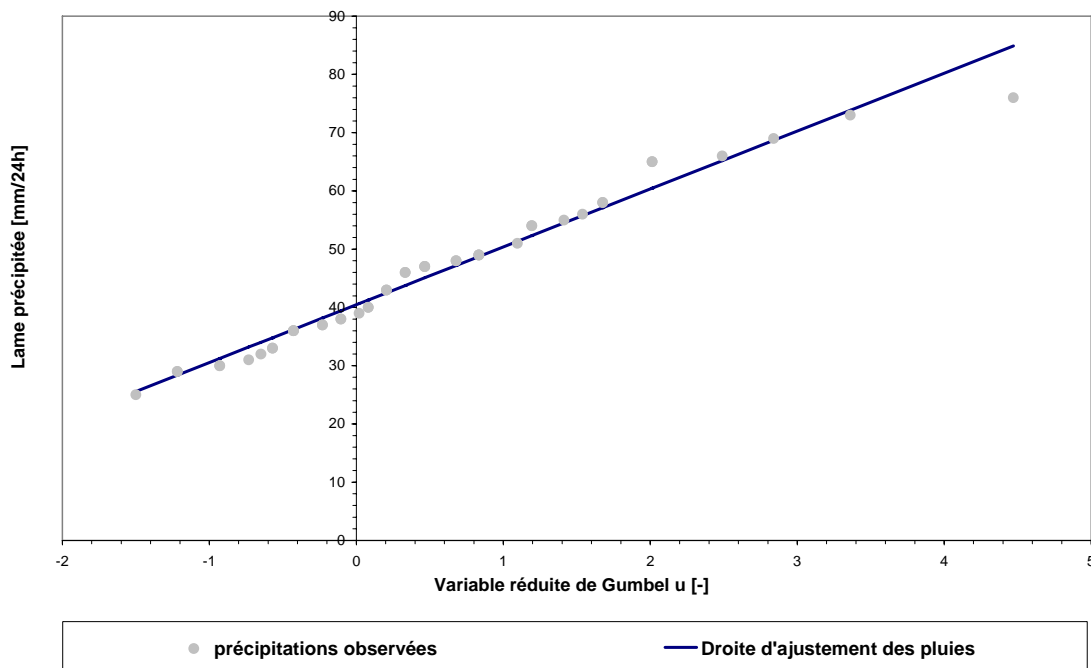


Figure 1. Ajustement graphique du modèle (calcul des paramètres « a » et « b » de la droite d'ajustement de Gumbel par la méthode graphique)

Etape 5 : Ajustement d'une relation linéaire de type $x_q = a + bu_q$ aux couples (u_i, x_i) (figure 1). Avec un ajustement de type graphique (à l'œil), on a alors une estimation des paramètres a_1 et b_1 ($a_1 = 40.5$ et $b_1 = 9.9$). La pente b_1 de cette droite n'est autre que le GRAdient Exponentielle des pluies.

Question 2 : Estimation des débits de pointe de temps de retour 20, 50, 100 et 500 ans par la méthode du GRADEX

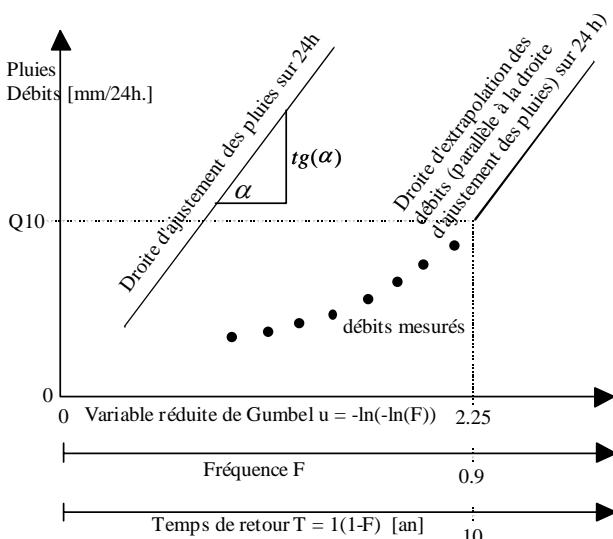
☉ Méthode à appliquer : Méthode du GRADEX

La méthode du GRADEX a été conçue, mise au point, testée et validée par le groupe de recherche d'EDF¹ (Guillot and Duband, 1967). Elle a pour but de rechercher les débits maximaux de crues pour des fréquences d'apparition rares à très rares (temps de retour de plus de 100 ans). Elle s'applique notamment lorsque l'on dispose d'une longue série de pluie et d'une courte série de débit (env.10 ans) sur le bassin, et spécialement dans les régions de montagne.

Le principe de la méthode est de considérer que la droite de distribution des débits est parallèle à partir du seuil, correspondant au temps de retour 10 ans, à celle des pluies (figure ci-contre).

Cette méthode s'appuie sur différentes hypothèses :

1. Les débits maximums recherchés sont provoqués uniquement par des pluies maximales, uniformément réparties sur le bassin.
2. Les pluies maximales et les débits correspondants (débits maximums) suivent une même loi de distribution statistique, dite des "extrêmes" en raison de la nature du phénomène recherché (crues rares).
3. Ceci exprime surtout le fait qu'à partir d'une certaine valeur de pluie, le comportement asymptotique du débit sera identique à celui des pluies. Selon les auteurs de cette méthode, ce seuil représente le taux de saturation du bassin qui est atteint après un événement pluviométrique qui provoque un débit décennal ($T = 10$ ans).



L'application de la méthode du GRADEX implique plusieurs contraintes :

1. La durée des pluies considérées doit strictement correspondre à celle des débits (même Δt et en général 24 h). Elle est conditionnée par le temps de concentration des eaux du bassin au point d'intérêt.
2. Les unités des pluies et des débits doivent être identiques, si l'on procède à l'application de cette méthode en utilisant la loi de Gumbel (en mm/24h).
3. Les limites d'application de cette méthode sont conditionnées par des temps de concentration t_c variant de 1 heure à 4 jours. La méthode ne peut donc s'appliquer qu'à des bassins versants de 5000 km² au maximum.

Il convient encore de signaler que les résultats obtenus par extrapolation sont des débits maximums moyens qui résultent de pluies maximales moyennes. Il s'agit donc de multiplier ces valeurs de débits

¹ Electricité De France

par le coefficient de pointe moyen (coefficient de pointe=débit de pointe/débit moyen) pour obtenir le débit maximum instantané.

⊙ Résultats :

L'ajustement des précipitations selon la loi de Gumbel étant fait, on peut alors tracer la fonction de répartition de la loi de distribution des débits moyens journaliers maximaux, comme la parallèle à la droite des pluies ($b_2 = b_1 = 9.9$) et passant par le point pivot correspondant au débit moyen journalier de temps de retour 10 ans. Il ne faut pas oublier de convertir les valeurs de débit journalier (en m^3/s) en lame écoulée (en mm) afin de pouvoir appliquer la méthode du GRADEX (ici, $Q_{p(10)} = 150 m^3/s = 43.2 mm/24h$).

En appliquant la loi d'ajustement extrapolée des débits pour les temps de retour 20, 50, 100 et 500 et en faisant la conversion adéquate pour avoir des valeurs en m^3/s , on obtient des valeurs de débits moyens journaliers. Il faut encore calculer les débits de pointe en multipliant les valeurs de débits trouvées précédemment par le coefficient de pointe.

Les résultats sont présentés dans la figure 1 et le tableau 1 ci-dessous :

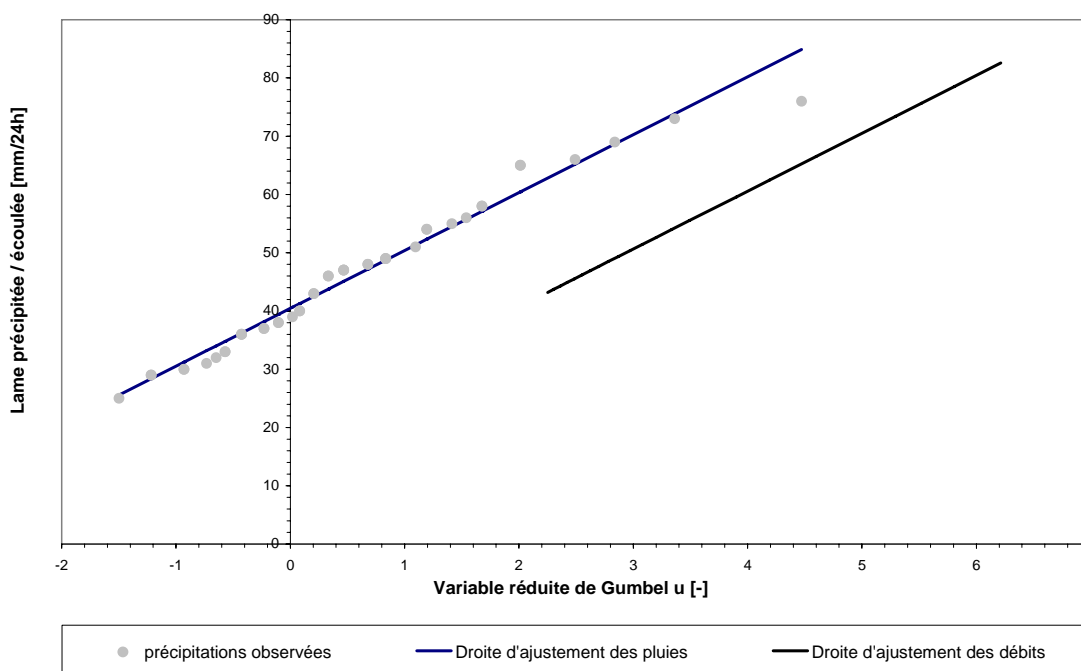


Figure 1. Ajustement graphique pour les pluies et droite d'extrapolation pour les débits.

Tableau 1. Débits moyens maximums journaliers et débit de pointe de temps de retour 10, 20, 50, 100 et 500 ans

T	F(x)	u	QT	QT	Qp
[ans]	[-]	[-]	[mm/24h]	[m3/s]	[m3/s]
10	0.900	2.25	43.2	150	240
20	0.950	2.97	50.3	175	280
50	0.980	3.90	59.6	207	331
100	0.990	4.60	66.5	231	370
500	0.998	6.21	82.6	287	459