

Exercice no HA 0812 - Corrigé

Estimation du débit de pointe de temps de retour 5 ans pour un bassin versant rural par la méthode rationnelle

Données de l'exercice

L'exercice porte sur le bassin versant expérimental suisse de Rottenbach situé dans la région des Préalpes (FR) et dont le régime d'écoulement est nivo-pluvial préalpin. Les caractéristiques physiographiques de ce bassin sont résumées dans le tableau 1-énoncé. Les autres données nécessaires à la réalisation de cet exercice se trouvent dans les tableaux 2 à 3 et les figures 1 à 2 de l'énoncé. Elles sont aussi regroupées dans le fichier Excel « HA0812_enonce.xls ». Une feuille de calcul Excel « HA0812_feuillecalcul.xls » à compléter est aussi disponible pour faire l'exercice. Les résultats sont disponibles sur le fichier Excel « HA0812_corrige.xls ».

Question 1 : Estimation des débits de pointe de temps de retour 2.33, 5, 20, 50, 100 ans par la méthode statistique (nécessite une longues séries de débits)

☉ Méthode à appliquer : ajustement statistique d'une série de données

L'objectif de cet exercice est d'estimer les débits de pointes (débits maximaux) correspondants à un certain temps de retour, c'est-à-dire à une certaine probabilité d'apparition donnée.

L'analyse fréquentielle d'une longue série de débits maximaux permet d'estimer le temps de retour d'une valeur particulière. Cette prédiction repose sur la définition et la mise en œuvre d'un **modèle fréquentiel** qui est une équation décrivant (modélisant) le comportement statistique d'un processus. Ces modèles décrivent la **probabilité d'apparition** d'un événement de valeur donnée. C'est du choix du modèle fréquentiel (et plus particulièrement de son type) que dépendra la validité des résultats de l'analyse fréquentielle.

Un modèle fréquentiel très souvent utilisé pour décrire le comportement statistique des valeurs extrêmes est la distribution statistique de Gumbel (loi double exponentielle ou loi de Gumbel). La fonction de répartition de la loi de Gumbel $F(x)$ s'exprime de la manière suivante :

$$F(x) = \exp\left(-\exp\left(-\frac{x-a}{b}\right)\right) \quad (1) \quad \text{avec la variable réduite suivante : } u = \frac{x-a}{b} \quad (2)$$

où a et b sont les paramètres du modèle de Gumbel.

La distribution s'écrit alors de la manière suivante :

$$F(x) = \exp(-\exp(-u)) \quad (3) \quad \text{et } u = -\ln(-\ln(F(x))). \quad (4)$$

L'avantage d'utiliser la variable réduite est que l'expression d'un quantile est alors linéaire ($x_q = a + bu_q$).

En conséquence, dès lors que les points de la série à ajuster peuvent être reportés dans un système d'axes $x-u$, il est possible d'ajuster une droite qui passe le mieux par ces points et d'en déduire les deux paramètres a et b de la loi. L'estimation des paramètres a et b de l'ajustement peut se faire graphiquement (ajustement à l'œil ou à l'aide d'une régression statistique), ou selon une méthode mathématique comme celle des moments (cf. ci-dessous).

En pratique il s'agit essentiellement d'estimer la probabilité de non dépassement $F(x_i)$ qu'il convient d'attribuer à chaque valeur x_i . Il existe de nombreuses formules d'estimation de la fonction de répartition $\hat{F}(x)$ à l'aide de la fréquence empirique. Elles reposent toutes sur un tri de la série par valeurs croissantes permettant d'associer à chaque valeur son rang r . Des simulations ont montré que pour la loi de Gumbel, il faut utiliser la fréquence empirique de Hazen :

$$F(x_{[r]}) = \frac{r-0.5}{n} \quad (5)$$

où r est le rang dans la série de données classée par valeurs croissantes, n est la taille de l'échantillon, $x_{[r]}$ la valeur de rang r .

Rappelons encore que le temps de retour T d'un événement est défini comme étant l'inverse de la fréquence d'apparition de l'événement. Soit :

$$T = \frac{1}{1 - F_Q(x_Q)} \quad (6)$$

A l'aide de l'ajustement, il est alors possible d'estimer le débit de pointe pour un temps de retour donné.

Rappel : Méthode des moments

La méthode des moments consiste à évaluer les moments des échantillons avec les moments théoriques de la loi¹. Par la méthode des moments les paramètres a et b sont calculés d'après les formules :

$$\begin{cases} \hat{b} = \frac{\sqrt{6}}{\pi} \hat{\sigma} \\ \hat{a} = \hat{\mu} - \hat{b}\gamma. \end{cases} \text{ avec } \gamma = 0.5772 \text{ (constante d'Euler).} \quad (7)$$

avec

σ : écart-type des valeurs composant l'échantillon.

μ : moyenne de l'échantillon.

Dès lors il est possible d'estimer les débits dont la représentation graphique est une droite d'équation :

$$\hat{Q} = \hat{a} + \hat{b} \cdot u \quad (8)$$

avec :

u : variable réduite (cf. équation (4)).

⊙ Démarche et résultats

Etape 1 : Préparation de la série de données des débits de pointe.

- Trier les valeurs dans l'ordre croissant.
- Attribuer un rang à chaque valeur.

Etape 2 : Calcul de la fréquence empirique pour chaque rang (Hazen, équation (5)).

Etape 3 : Calcul de la variable réduite « u » du Gumbel (équation (4)).

¹ Autrement dit : la méthode des moments consiste à évaluer les caractéristiques de la distribution (empirique) des échantillons avec les caractéristiques théoriques de la loi. Les caractéristiques utilisées pour décrire une distribution sont les moments dont les plus connus sont la moyenne et la variance (la moyenne d'une distribution est appelée premier moment, la variance est le deuxième moment). Les moments d'ordre plus élevés sont utiles pour caractériser d'autres aspects de la distribution. Le troisième moment est par exemple lié à l'asymétrie ou la dyssymétrie.

Etape 4 : Représentation graphique des couples (u_i, x_i) de la série à ajuster (figure 1).

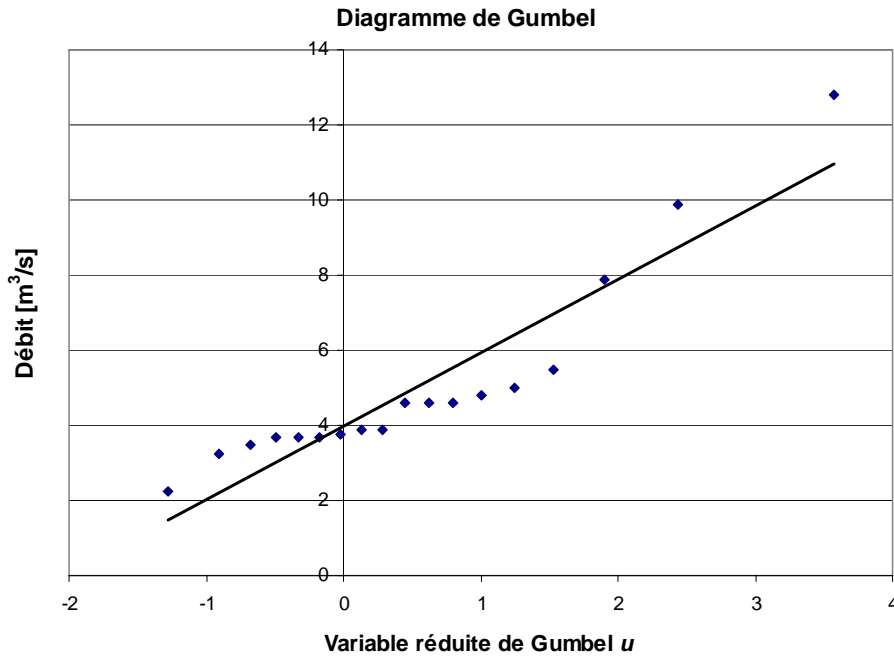


Figure 1. Ajustement graphique du modèle (calcul des paramètres « a » et « b » de la droite d'ajustement de Gumbel par la méthode des moments)

Etape 5 : Ajustement d'une relation linéaire de type $x_q = a + bu_q$ aux couples (u_i, x_i) (figure 1). Avec un ajustement de type graphique (à l'œil), on a alors une estimation des paramètres a_1 et b_1 :

$$a_1 = 1.96 \text{ et } b_1 = 3.97$$

Avec un ajustement par la méthode des moments, on a alors une estimation peu différente des paramètres a_2 et b_2 :

$$a_2 = 2.04 \text{ et } b_2 = 3.90$$

Vérifier de manière visuelle l'ajustement. On peut remarquer que l'ajustement est médiocre. A ce stade, il serait nécessaire de vérifier statistiquement que les valeurs observées sont estimées « de manière satisfaisante » à l'aide de tests d'ajustement appropriés.

Etape 6 : Utilisation du modèle statistique pour estimer des débits de pointe de différents temps de retour T . Pour $T=100$ ans, on suit les étapes suivantes :

- Calcul de la fréquence de non-dépassement d'après la relation (6) :

$$F(Q_p(T)) = 1 - \frac{1}{T} = 1 - \frac{1}{100} = 0,99$$

- Calcul de la variable réduite de Gumbel correspondante d'après la relation (4) :

$$u = -\ln(-\ln(F(Q_p(T)))) = -\ln(-\ln(0,99)) = 4,6$$

- Calcul du quantile correspondant d'après la relation linéaire (avec a et b fournis par l'étape 5 précédente) :

$$Q_p(100) = a_1 + b_1 \cdot u_{100} = 3.97 + 1,96 \cdot 0.99 = 13 \text{ m}^3/\text{s}$$

On a de même pour les autres temps de retour :

$$Q_q(2,33) = a + bu_{2,33} = 3,97 + 1,96 \cdot 0,57 = 5,1 \text{ m}^3/\text{s}$$

$$Q_q(5) = a + bu_5 = 3,97 + 1,96 \cdot 0,8 = 6,9 \text{ m}^3/\text{s}$$

$$Q_q(20) = a + bu_{20} = 3,97 + 1,96 \cdot 0,95 = 9,8 \text{ m}^3/\text{s}$$

$$Q_q(50) = a + bu_{50} = 3,97 + 1,96 \cdot 0,98 = 11,6 \text{ m}^3/\text{s}$$

Question 2 : Estimation des débits de pointe de temps de retour 2.33, 5, 20, 50, 100 ans par la méthode rationnelle

⊙ Méthode à appliquer : la méthode pseudo-empirique de la formule rationnelle

Le concept de la méthode rationnelle doit son origine à un ingénieur irlandais Mulvanay responsable de drainage agricole au siècle dernier (1850). Malgré de nombreuses hypothèses simplificatrices, c'est probablement de loin la formule la plus connue et la plus utilisée essentiellement à cause de sa simplicité, mais aussi du fait que les séries de pluies sont souvent plus longues que celles des débits.

Le débit de pointe est calculé en fonction des caractéristiques physiographiques des bassins versants et de l'intensité des précipitations (estimée à partir des courbes IDF) selon l'expression suivante :

$$Q_p(t) = u \cdot C_r \cdot i(T, t_c) \cdot A \quad (9)$$

Avec :

C_r : Coefficient de ruissellement (ou coefficient d'écoulement) du bassin versant qui dépend de la couverture du sol et du temps de retour (cf. figure 2- énoncé) [-] ;

$i(T, t_c)$: Intensité moyenne maximale de la pluie fonction du temps de concentration t_c et de la période de retour T [mm/h] ;

A : Superficie du bassin versant [ha] ;

u : Coefficient qui est fonction des unités choisies. Avec A en ha, i en mm/h et $u = 0.0028$, on obtient Q en m^3/s .

L'application de cette méthode nécessite l'identification des différents coefficients qui la caractérisent, à savoir, le coefficient de ruissellement C_r , le temps de concentration t_c , l'intensité moyenne maximale de la pluie i .

- **L'estimation du coefficient de ruissellement** : Il existe des tableaux de valeurs expérimentales de ce coefficient suivant le type de sol, sa couverture végétale et la pente du bassin. Si le bassin est caractérisé par des couvertures ou des pentes très différentes il est alors nécessaire de procéder à la détermination d'un nouveau coefficient de ruissellement moyen à l'aide d'une moyenne pondérée par les surfaces.
- **Estimation du temps de concentration** : A défaut de mesures, le temps de concentration t_c peut être estimé par des formules empiriques, comme celle de Ventura :

$$\text{Formule de Ventura : } t_c = 76.3 \cdot \frac{\sqrt{A}}{\sqrt{I}} \quad (10)$$

t_c : Temps de concentration [min],
 A : surface du bassin versant [km^2],
 I : pente moyenne du bassin [%].

- **Estimation de l'intensité moyenne maximale des précipitations** : les méthodes et les formulations mathématiques pour estimer l'intensité critique pour un temps de retour T donné sont multiples. Ici, la formule de Montana et les coefficients du tableau 2-énoncé sont utilisés :

$$i(T, t_c) = a(T) \cdot t^{-b(T)} \quad (11)$$

i : intensité moyenne maximale de l'averse de durée t [mm/h],
 t : durée de la pluie = t_c [min] ;
 a, b : paramètres locaux dépendant du lieu et du temps de retour T .

Rappelons qu'une hypothèse de la méthode rationnelle est que la durée de la pluie est égale au temps de concentration (t_c).

⊙ Démarche et résultats

Etape 1 : Estimation du coefficient de ruissellement moyen, pondéré par les surfaces. Pour le bassin de Rotenbach, ce calcul est facilement réalisé à partir :

- Des caractéristiques du bassin versant (surface et % occupation du sol – Tableau 2-énoncé).

$$A = 1.66 \text{ km}^2 \text{ dont } P(\text{forêt}) = 27,9 \%, P(\text{près}) = 71,5 \% \text{ et } P(\text{Urbain}) = 0,61 \%$$

- Des valeurs caractéristiques des coefficients de ruissellement pour différents types d'occupation du sol, et différentes pentes (d'après figure 1 –énoncé) :

$$I = 32,9 \% \quad \text{d'où : } Cr(\text{forêts}) = 0,13; Cr(\text{près}) = 0,25 \text{ et } Cr(\text{Urbain}) = 0,9$$

- Et ainsi : $\bar{C}_r = \frac{27,9 \cdot 0,13 + 71,5 \cdot 0,25 + 0,61 \cdot 0,9}{27,9 + 71,5 + 0,9} = 0,22$.

Etape 2 : Estimation du temps de concentration d'après l'équation (10) :

$$t_c = 76,3 \cdot \frac{\sqrt{A}}{\sqrt{I}} = 76,3 \cdot \frac{\sqrt{1,66}}{\sqrt{32,9}} = 17,1 \text{ min}$$

Etape 3 : Estimation de l'intensité critique de pluie pour T et de durée $t = t_c$ d'après l'équation (11) et les coefficients a et b du tableau 3-énoncé :

Soit :

$$i_{2,33} = a \cdot t_c^{-b} = 310,1 \cdot 17,1^{-0,63} = 51,3 \text{ mm/h}$$

$$i_5 = a \cdot t_c^{-b} = 390,4 \cdot 17,1^{-0,63} = 64,3 \text{ mm/h}$$

$$i_{20} = a \cdot t_c^{-b} = 581,1 \cdot 17,1^{-0,65} = 91,7 \text{ mm/h}$$

$$i_{50} = a \cdot t_c^{-b} = 672,1 \cdot 17,1^{-0,65} = 104,5 \text{ mm/h}$$

$$i_{100} = a \cdot t_c^{-b} = 793,8 \cdot 17,1^{-0,66} = 121,7 \text{ mm/h}$$

Etape 4 : Estimation des débits de pointe pour les différents temps de retour T d'après la formule rationnelle, i.e. l'équation (9) :

$$Q_{2,33} = u \cdot C_r \cdot i_{2,33} \cdot A = 0,0028 \cdot 0,22 \cdot 51,3 \cdot 1.66 \cdot 100 = 5,3 \text{ m}^3/\text{s}$$

$$Q_5 = u \cdot C_r \cdot i_5 \cdot A = 0,0028 \cdot 0,22 \cdot 64,3 \cdot 1.66 \cdot 100 = 6,6 \text{ m}^3/\text{s}$$

$$Q_{20} = u \cdot C_r \cdot i_{20} \cdot A = 0,0028 \cdot 0,22 \cdot 91,7 \cdot 1.66 \cdot 100 = 9,4 \text{ m}^3/\text{s}$$

$$Q_{50} = u \cdot C_r \cdot i_{50} \cdot A = 0,0028 \cdot 0,22 \cdot 104,5 \cdot 1.66 \cdot 100 = 10,7 \text{ m}^3/\text{s}$$

$$Q_{100} = u \cdot C_r \cdot i_{100} \cdot A = 0,0028 \cdot 0,22 \cdot 121,7 \cdot 1.66 \cdot 100 = 12,5 \text{ m}^3/\text{s}$$

⊙ Attention aux unités !

Rappel : $1 \text{ km}^2 = 100 \text{ ha}$

Question 3 : Estimation des débits de pointe de temps de retour 2.33, 5, 20, 50, 100 ans par la méthode régionale

⊙ Méthode à appliquer : Méthode de « l'indice de crue »

Le débit associé à un temps de retour de 2.33 ans (temps de retour de l'espérance mathématique d'une variable aléatoire distribuée selon une loi de Gumbel), noté généralement $Q_{2.33}$, peut-être régionalisée à l'intérieur d'un espace défini, à l'aide d'une relation de type empirique ou statistique (souvent fonction de la surface), qui permet d'estimer la valeur moyenne du débit annuel de temps de retour de 2,33 ans en tous points de cet espace par interpolation. Le passage de cette valeur moyenne à un débit moyen ou maximal de crue de temps de retour différent s'effectue à l'aide d'autres relations, validées sur la même zone.

Pour la Suisse Occidentale, Niggli et al, 2000 proposent une formule de détermination du $Q_{2.33}$, dépendant de la surface du bassin considéré et d'un paramètre régional K . Elle se présente sous la forme suivante :

$$Q_{2.33} = K_{2.33} \cdot A^{0.66} \quad (12)$$

avec :

$$K = 0.0056 \cdot EL^{-0.56} \cdot ALT^{0.63}$$

$Q_{2.33}$: débit annuel de temps de retour de 2,33 ans [m^3/s] ;

K : Paramètre régional [-] ;

A : surface [km^2] ;

EL : Elongation du versant (rapport entre le diamètre du cercle ayant la même surface que le bassin versant et la longueur totale du réseau hydrographique) [-] ;

ALT : altitude moyenne du bassin versant [m].

La moyenne des débits de pointe annuels Q_T pour une période de retour T est finalement obtenue par la relation suivante :

$$Q_T = F_{C_T} \cdot Q_{2.33} = F_{C_T} \cdot 0,0056 \cdot EL^{-0.56} \cdot ALT^{0.63} \cdot A^{0.66} \quad (13)$$

Où F_{C_T} est le facteur de croissance en fonction du temps de retour T (cf. figure 2- énoncé).

⊙ Démarche et résultats

Etape 1 : Calcul du débit annuel $Q_{2.33}$ à partir des caractéristiques physiographiques des bassins versants étudiés et de l'équation (12). On a donc :

$$Q_{2.33} = 0,0056 \cdot EL^{-0.56} \cdot ALT^{0.63} \cdot A^{0.66} = 0,0056 \cdot 0,26^{-0.56} \cdot 1454^{0.63} \cdot 1,66^{0.66}$$

$$Q_{2.33} = 1,5 \text{ m}^3/\text{s}$$

Etape 2 : Calcul des débits pour les différents temps de retour (5, 20, 50 et 100 ans) en utilisant le débit de pointe annuel $Q_{2.33}$ estimé précédemment et la courbe de croissance établie pour la région donnée du bassin considéré (cf. figure 2-énoncé). Ici le bassin de Rottenbach est classé dans la région « Pré-Alpes » et on a :

$$Q_{5ans} = F_{C_{5ans}} \cdot Q_{2.33} = 1,26 \cdot 1,5 = 1,9 \text{ m}^3/\text{s}$$

$$Q_{20ans} = F_{C_{20ans}} \cdot Q_{2.33} = 1,87 \cdot 1,5 = 2,9 \text{ m}^3/\text{s}$$

$$Q_{50ans} = F_{C_{50ans}} \cdot Q_{2.33} = 2,35 \cdot 1,5 = 3,6 \text{ m}^3/\text{s}$$

$$Q_{100ans} = F_{C_{100ans}} \cdot Q_{2.33} = 2,77 \cdot 1,5 = 4,3 \text{ m}^3/\text{s}$$

Question 4. Comparer l'ensemble des résultats obtenus

Pour les différentes méthodes et les différents temps de retour, les résultats sur le bassin versant de Rotenbach sont regroupés dans le tableau suivant. La méthode régionale sous-estime clairement les débits de pointe. Ceci est probablement dû au fait que le bassin n'est pas homogène par rapport aux paramètres utilisés dans la régionalisation. Les deux autres méthodes donnent des résultats semblables.

Tableau 1 : Comparaison des $Q_{p(2,33)}$ obtenus (en m^3/s) avec le débit moyen observé pour les bassins de la Mentue, Haute Mentue, Rotenbach, Rappengraben.

période de retour T =	100	50	20	5	2.33
Qp [Statistique] =	13.0	11.6	9.8	6.9	5.1
Qp [V, Montana] =	12.5	10.7	9.4	6.6	5.3
Qp(T) [régional] =	4.3	3.6	2.9	1.9	1.5

Finalement, il peut y avoir une grande variabilité des débits de pointes estimés selon les différentes méthodes et formules. Il faut choisir la méthode selon son domaine d'utilisation et considérer si les valeurs observées sont disponibles. Rappelons les points suivants :

1) On a uniquement des estimations grossières vu les nombreuses sources d'incertitude.

- **Méthode statistique** : L'ajustement de Gumbel n'est pas forcément le plus approprié (il y a d'autres types possibles d'ajustements dans le Polycopié Hydrologie Fréquentielle ou dans l'annexe du cours Hydrologie Appliquée). Si l'ajustement est réalisé sur des séries trop courtes, cela peut conduire à des estimations loin de la réalité...
- **Méthode régionale** : Cette méthode implique le calcul des débits uniquement en fonction des caractéristiques des bassins versants. Si les bassins à étudier ne sont pas homogènes (caractéristiques prédominantes non prises en compte dans les paramètres de régionalisation), l'utilisation d'une formule régionale donnera forcément des Q_p très différents des estimations obtenues par la méthode régionale.
- **Méthode rationnelle** : Une des limites de cette méthode est le problème posé par les multiples formules et abaques nécessaires pour estimer le temps de concentration (lesquelles choisir ?), le coefficient de ruissellement et l'intensité des précipitations. Un autre problème classique de cette méthode est l'hypothèse sur les temps de retour : $T(\text{pluie})=T(\text{débit})$. Enfin, l'estimation du coefficient de ruissellement peut être délicate. De plus rappelons que le Cr n'est pas égale dans l'espace ni dans le temps ni pour des temps de retour différents.

2) Domaine de validité des méthodes :

- **Méthode statistique** : appropriée pour les bassins versants avec de longues séries de débit ;
- **Méthode régionale** : appropriée pour des bassins versants $> 10 \text{ km}^2$ et souvent plus appropriée pour les grands temps de retour;
- **Méthode rationnelle** : appropriée pour les petits bassins versants $< 3 \text{ km}^2$ (ex. Rotenbach).