ÉCOLE POLYTECHNIQUE FÉDÉRALE DE LAUSANNE

Exercice n° HF 0201 - Corrigé

Construction des courbes Intensité – Durée – Fréquence à partir de 5 séries de lames précipitées maximales annuelles (t= 1 à 5 jours) - Application à la station d'Avenches (VD-FR, Suisse)

Données de l'exercice :

L'exercice porte sur les lames précipitées maximales annuelles pour des pluies d'une durée comprise entre 1 et 5 jours enregistrées à la station d'Avenches de 1969 à 1999. données pluviométriques sont regroupées dans le tableau 1-énoncé, ainsi que dans le fichier Excel « exercice HF0201_enonce.xls ». Ces données sont aussi regroupées dans une feuille de calcul à compléter qui est disponible dans le fichier Excel « HF0201_feuilledecalcul.xls ». Les résultats sont aussi disponibles sur le fichier Excel « HF0201_corrige.xls ».

Question 1 : Estimation des lames précipitées maximales annuelles de temps de retour T= 2, 5, 10, 20 et 50 ans pour les 5 séries de pluies (t=1 à 5 jours)

⦿ Méthode à appliquer : ajustement statistique d'une série de données – distribution de Gumbel

L'analyse fréquentielle d'une longue série de valeurs maximales permet d'estimer le temps de retour d'une valeur particulière. Cette prédiction repose sur la définition et la mise en œuvre d'un **modèle fréquentiel** qui est une équation décrivant (modélisant) le comportement statistique d'un processus. Ces modèles décrivent la **probabilité d'apparition** d'un événement de valeur donnée. C'est du choix du modèle fréquentiel (et plus particulièrement de son type) que dépendra la validité des résultats de l'analyse fréquentielle.

Un modèle fréquentiel très souvent utilisé pour décrire le comportement statistique des valeurs extrêmes est la distribution statistique de Gumbel (loi double exponentielle ou loi de Gumbel). La fonction de répartition de la loi de Gumbel *F(x)* s'exprime de la manière suivante :

$$F(x) = \exp\left(-\exp\left(-\frac{x-a}{b}\right)\right) \quad (1) \quad \text{avec la variable réduite suivante : } u = \frac{x-a}{b} \quad (2)$$

où a et b sont les paramètres du modèle de Gumbel.

La distribution s'écrit alors de la manière suivante :

$$F(x) = \exp(-\exp(-u)) \quad (3) \qquad \text{et } u = -\ln(-\ln(F(x))). \quad (4)$$

L'avantage d'utiliser la variable réduite est que l'expression d'un quantile est alors linéaire ($x_q = a + bu_q$).

En conséquence, dès lors que les points de la série à ajuster peuvent être reportés dans un système d'axes $x-u$, il est possible d'ajuster une droite qui passe le mieux par ces points et d'en déduire les deux paramètres a et b de la loi. L'estimation des paramètres a et b de l'ajustement peut se faire graphiquement (ajustement à l'œil ou à l'aide d'une régression statistique), ou selon une méthode mathématique comme celle des moments (cf. ci-dessous).

En pratique il s'agit essentiellement d'estimer la probabilité de non dépassement $F(x_i)$ qu'il convient d'attribuer à chaque valeur x_i. Il existe de nombreuses formules d'estimation de la fonction de répartition $\hat{F}(x)$ à l'aide de la fréquence empirique. Elles reposent toutes sur un tri de la série par valeurs croissantes permettant d'associer à chaque valeur son rang *r*. Des simulations ont montré que pour la loi de Gumbel, il faut utiliser la fréquence empirique de Hazen :

$$F\left(x_{[r]}\right) = \frac{r-0.5}{n} \qquad (5)$$

où *r* est le rang dans la série de données classée par valeurs croissantes, *n* est la taille de l'échantillon, $x_{[r]}$ la valeur de rang *r*.

Rappelons encore que le temps de retour *T* d'un événement est défini comme étant l'inverse de la fréquence d'apparition de l'événement. Soit :

$$T = \frac{1}{1-F_Q(x_Q)}. \qquad (6)$$

A l'aide de l'ajustement, il est alors possible d'estimer le débit de pointe pour un temps de retour donné.

☉ Méthode à appliquer : Méthode des moments

La méthode des moments consiste à égaler les moments des échantillons avec les moments théoriques de la loi[1]. Par la méthode des moments les paramètres *a* et *b* sont calculés d'après les formules :

$$\begin{cases} \hat{b} = \dfrac{\sqrt{6}}{\pi}\hat{\sigma} \\ \hat{a} = \hat{\mu} - \hat{b}\gamma. \end{cases} \quad \text{avec } \gamma = 0.5772 \text{ (constante d'Euler).} \quad (7)$$

avec

σ : écart-type des valeurs composant l'échantillon.

μ : moyenne de l'échantillon.

Dès lors il est possible d'estimer les débits dont la représentation graphique est une droite d'équation :

$$\hat{Q} = \hat{a} + \hat{b} \cdot u \qquad (8)$$

avec :

u: variable réduite (cf. équation (4)).

☉ Démarche et résultats

Pour une durée de pluie donnée, l'estimation du temps de retour de chaque lame précipitée, s'effectue selon les étapes :

Etape 1 : Préparation de la série de données des lames précipitée :

- Trier les valeurs dans l'ordre croissant.
- Attribuer un rang à chaque valeur.

Etape 2 : Calcul de la fréquence empirique pour chaque rang (Hazen, équation (5)).

---

[1] Autrement dit : la méthode des moments consiste à égaler les caractéristiques de la distribution (empirique) des échantillons avec les caractéristiques théoriques de la loi. Les caractéristiques utilisées pour décrire une distribution sont les moments dont les plus connus sont la moyenne et la variance (la moyenne d'une distribution est appelée premier moment, la variance est le deuxième moment). Les moments d'ordre plus élevés sont utiles pour caractériser d'autres aspects de la distribution. Le troisième moment est par exemple lié à l'asymétrie ou la dyssimétrie.

Etape 3 : Calcul de la variable réduite « u » du Gumbel (équation (4)).

Etape 4 : Représentation graphique des couples (u_i, x_i) de la série à ajuster (figure 1).

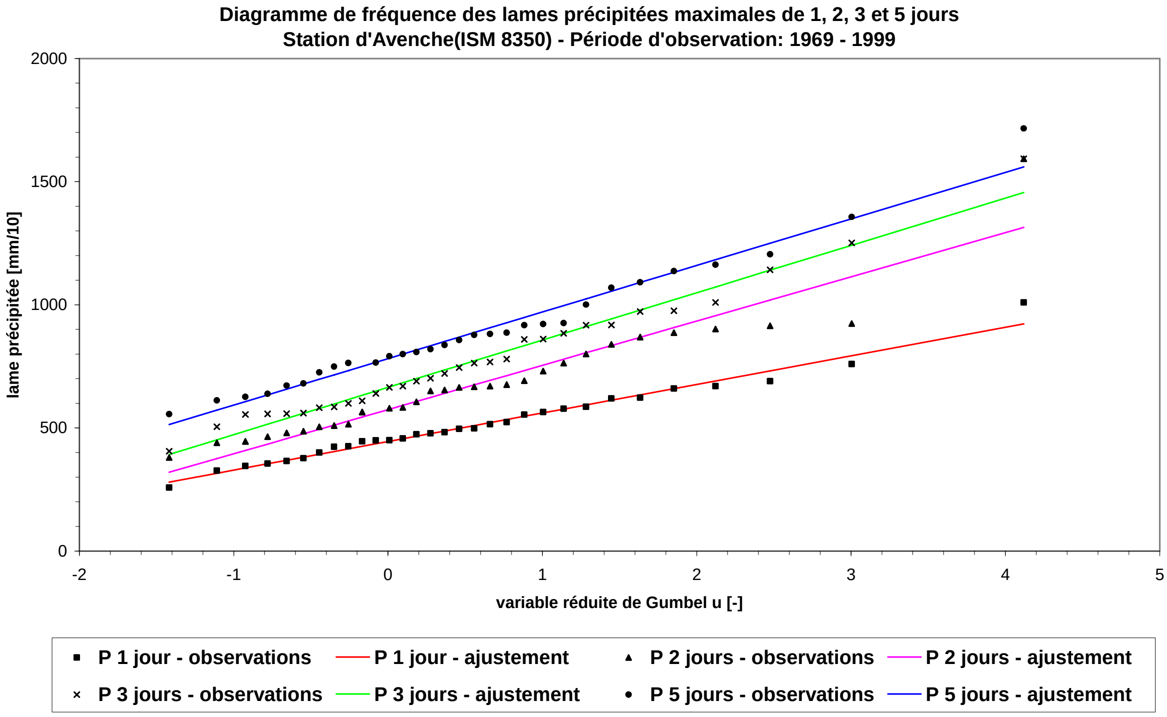

Figure 1. Ajustement graphique du modèle (calcul des paramètres « a » et « b » de la droite d'ajustement de Gumbel par la méthode des moments) pour les 5 séries de données

Etape 5 : Ajustement d'une relation linaire de type $x_q = a + bu_q$ aux couples (u_i, x_i) (figure 1).

Vérifier de manière visuelle l'ajustement. On peut remarquer que l'ajustement est médiocre pour les grandes valeurs de *u*. A ce stade, il serait nécessaire de vérifier statistiquement que les valeurs observées sont estimées « de manière satisfaisante » à l'aide de tests d'ajustement appropriés.

Etape 6 : Calcul de l'intervalle de confiance à l'aide de la formulation de l'énoncé (voir figure).

Etape 7 : Utilisation du modèle statistique pour estimer les lames précipitées de différents temps de retour *T*. Par exemple, pour *T*=20 ans et *t*=24 h, on suit les étapes suivantes :

- Calcul de la fréquence de non-dépassement d'après la relation (6) :

$$F(Q_p(T)) = 1 - \frac{1}{T} = 1 - \frac{1}{20} = 0,95$$

- Calcul de la variable réduite de Gumbel correspondante d'après la relation (4) :

$$u = -\ln\left(-\ln\left(F(Q_p(T))\right)\right) = -\ln\left(-\ln\left(0,95\right)\right) = 2,97$$

- Calcul du quantile correspondant d'après la relation linéaire (avec *a* et *b* fournis par l'étape 5 précédente) :

$$L_{(20,24)} = a_{(20,24)} + b_{(20,24)} = 444.6 + 116 \bullet 2.97 = 789 \ \ \mathrm{mm}/10$$

L'ensemble des résultats pour les 5 séries de données (*t*=1 à 5 jours) sont regroupés dans le tableau 1 suivant :

Tableau 1 : Estimation des lames précipitées, en mm/10, à la station pluviométrique d'Avenches pour différents temps de retour et pour la période 1969 – 1999

	Temps de retour				
Durée *d* [h]	**2** [an]	**5** [an]	**10** [an]	**20** [an]	**50** [an]
24	487	619	706	789	897
48	640	844	979	1108	1275
72	735	953	1097	1235	1414
96	804	1027	1175	1317	1501
120	851	1065	1207	1343	1520

Question 2. Représentation graphique sous la forme de courbes Intensité – Durée – Fréquence

⦿ Méthode à appliquer : définition des courbes IDF

Les courbes IDF représentent l'intensité pluviométrique *i* en fonction de la durée de l'averse et de son temps de retour *T*.

⦿ Résultats :

Il s'agit donc simplement de calculer à partir du tableau 1 précédent et pour chaque temps de retour et durée de pluie considérée, l'intensité pluviométrique moyenne maximale. Les résultats sont regroupés dans le tableau 2 suivant :

Tableau 2 : Estimation des intensités moyenne, en mm/h, à la station pluviométrique d'Avenches pour différents temps de retour et pour la période 1969 – 1999

	Temps de retour				
Durée *d* [h]	**2** [an]	**5** [an]	**10** [an]	**20** [an]	**50** [an]
24	2.0	2.6	2.9	3.3	3.7
48	1.3	1.8	2.0	2.3	2.7
72	1.0	1.3	1.5	1.7	2.0
96	0.8	1.1	1.2	1.4	1.6
120	0.7	0.9	1.0	1.1	1.3

La représentation graphique des valeurs du tableau 2 permet d'avoir une idée sur l'allure des courbes IDF à Avenches (figure 2). Lors de la lecture d'un tel graphique, il faut être attentif aux unités employées ainsi qu'aux échelles des axes ; l'allure des courbes IDF peut être très différente.

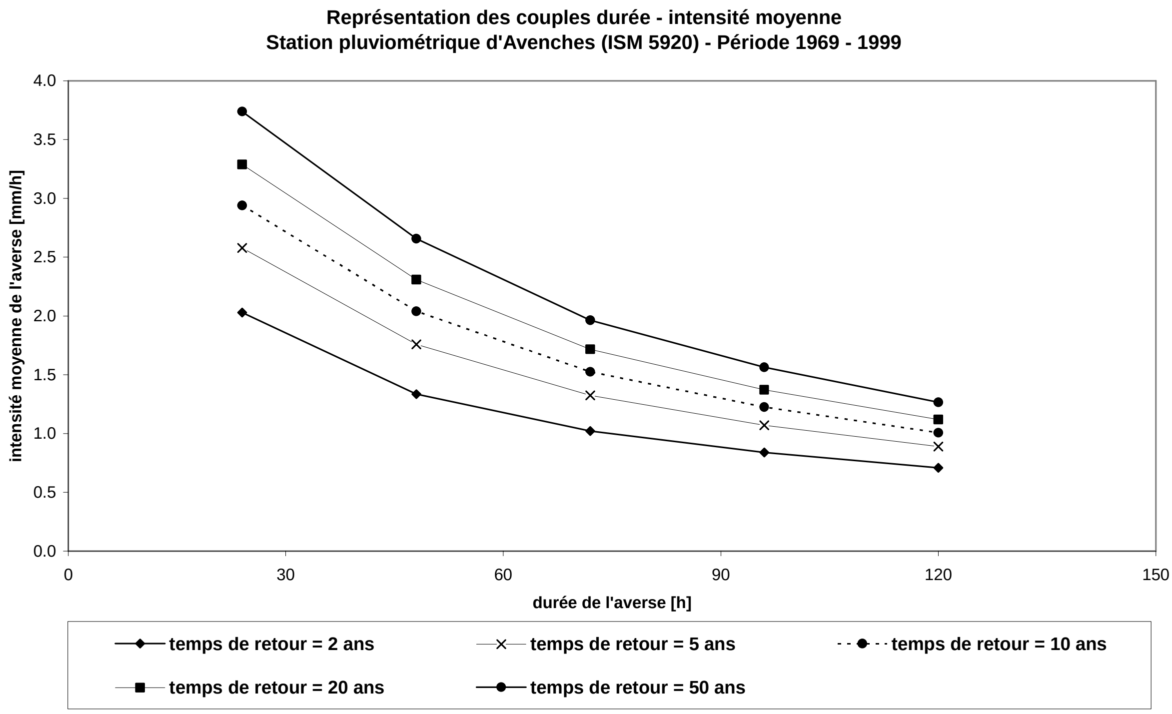

Figure 2 : Représentation des couples durée – intensité moyenne déterminés à la station pluviométrique d'Avenches pour la période 1969 – 1999

Question 3. Calcul des parmètres de la formule de Montana

☉ Méthode à appliquer : formule simplifiée de Montana

Différentes formules analytiques sont proposées pour représenter l'intensité critique d'une pluie en fonction de sa durée (loi de pluviosité). Pour une fréquence de dépassement donnée, la formule simplifiée de Montana s'exprime selon :

$$i_T(t) = \frac{a}{t^b} \quad (9) \quad \text{avec :}$$

$i_T(t)$: intensité pluviométrique pour une averse de durée t et de temps de retour T, en [mm/h]
a et b : paramètres d'ajustement fonction du temps de retour et du lieu
t : durée de l'averse, en [h]

L'estimation des paramètres a et b de Montana est simplifiée en prenant le logarithme de cette formule de manière à obtenir une relation linéaire :

$$\ln\left(i_T(t)\right) = \ln(a) - b \cdot \ln(t)$$

☉ Démarche et résultats :

Pour chaque temps de retour *T :*

Etape 1 : calcul des logarithmes ln(t) et ln($i_T(t)$).

Etape 2 : calcul des paramètres de la droite de régression passant par les couples (ln(t), ln($i_T(t)$)). On peut utiliser la technique des moindres carrés pour l'estimation des paramètres « pente » (ou paramètre -b de Montana) et « ordonnées à l'origine » (ln(a)).

Etape 3 : Calcul du paramètre *a* et *b* de Montana en prenant encore l'exponentielle de ln(*a*) et le paramètres *b* (i.e. - pente précédente).

Les résultats sont regroupés dans le tableau 3 et représentés dans la figure 3.

Tableau 3 : Valeurs des paramètres de Montana pour différents temps de retour

Temps de retour [an]	**paramètre "b" de Montana**	**paramètre "a" de Montana**
2	**0.65**	**16.28**
5	**0.66**	**21.62**
10	**0.66**	**25.17**
20	**0.67**	**28.58**
50	**0.67**	**33.00**

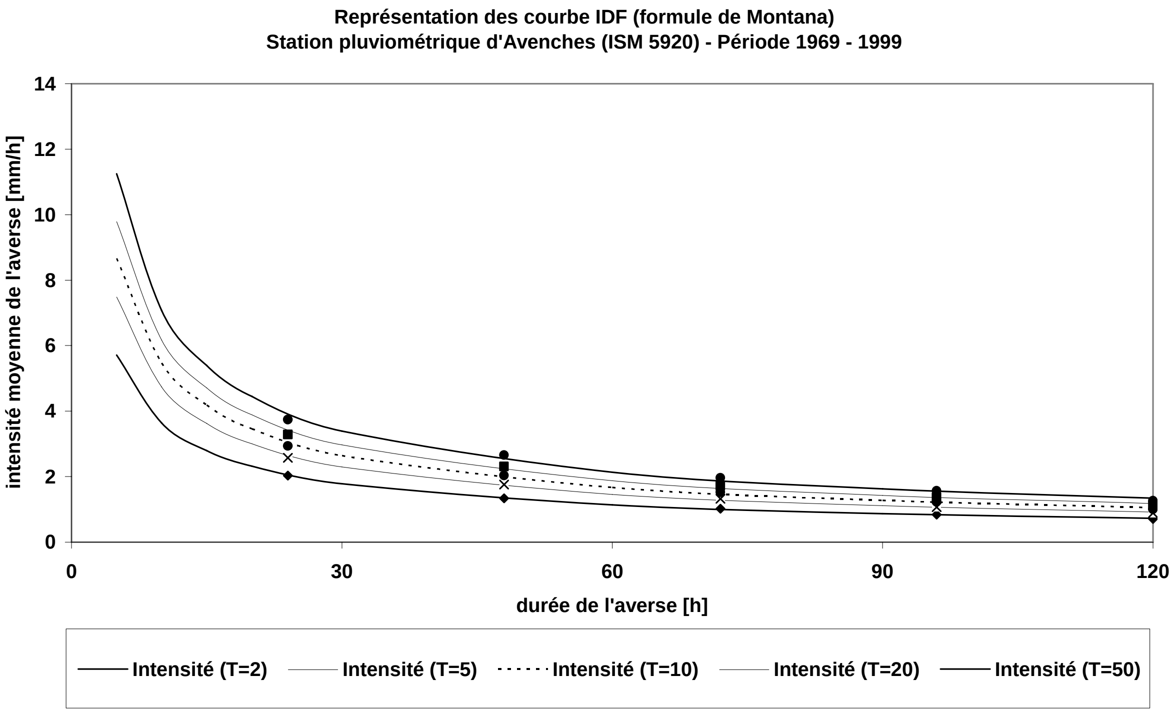

Figure 3 : Représentation des courbes IDF avec la formule de Montana déterminés à la station pluviométrique d'Avenches pour la période 1969 – 1999

Dès à présent il est possible d'estimer l'intensité d'une averse dont la durée est comprise entre 24 et 120 heures.