ÉCOLE POLYTECHNIQUE
FÉDÉRALE DE LAUSANNE

Exercice n° HF 0204 - Corrigé

Construction des courbes Intensité – Durée – Fréquence à partir de 5 séries de lames précipitées maximales annuelles (t= 1 à 5 jours) - Application à la station d'Avenches (VD-FR, Suisse)

Données de l'exercice :

L'exercice porte sur 10 lames précipitées maximales annuelles pour des pluies d'une durée comprise entre 1 et 5 jours enregistrées à la station d'Avenches de 1990 à 1999. données pluviométriques sont regroupées dans le tableau 1-énoncé, ainsi que dans le fichier Excel « HF0204_enonce.xls ». Les résultats sont aussi disponibles sur le fichier Excel « HF0204_corrige.xls ».

Question 1 : Estimation des lames précipitées maximales annuelles de temps de retour T= 2, 5, 10, 20 et 50 ans pour les 5 séries de pluies (t=1 à 5 jours)

⦿ Méthode à appliquer : ajustement statistique d'une série de données – distribution de Gumbel

L'analyse fréquentielle d'une longue série valeurs maximales permet d'estimer le temps de retour d'une valeur particulière. Cette prédiction repose sur la définition et la mise en œuvre d'un **modèle fréquentiel** qui est une équation décrivant (modélisant) le comportement statistique d'un processus. Ces modèles décrivent la **probabilité d'apparition** d'un événement de valeur donnée. C'est du choix du modèle fréquentiel (et plus particulièrement de son type) que dépendra la validité des résultats de l'analyse fréquentielle.

Un modèle fréquentiel très souvent utilisé pour décrire le comportement statistique des valeurs extrêmes est la distribution statistique de Gumbel (loi double exponentielle ou loi de Gumbel). La fonction de répartition de la loi de Gumbel *F(x)* s'exprime de la manière suivante :

$$F(x) = \exp\left(-\exp\left(-\frac{x-a}{b}\right)\right) \quad (1) \quad \text{avec la variable réduite suivante : } u = \frac{x-a}{b} \quad (2)$$

où a et b sont les paramètres du modèle de Gumbel.

La distribution s'écrit alors de la manière suivante :

$$F(x) = \exp(-\exp(-u)) \quad (3) \qquad \text{et } u = -\ln(-\ln(F(x))). \quad (4)$$

L'avantage d'utiliser la variable réduite est que l'expression d'un quantile est alors linéaire ($x_q = a + bu_q$).

En conséquence, dès lors que les points de la série à ajuster peuvent être reportés dans un système d'axes $x-u$, il est possible d'ajuster une droite qui passe le mieux par ces points et d'en déduire les deux paramètres a et b de la loi. L'estimation des paramètres a et b de l'ajustement peut se faire graphiquement (ajustement à l'œil ou à l'aide d'une régression statistique), ou selon une méthode mathématique comme celle des moments (cf. ci-dessous).

En pratique il s'agit essentiellement d'estimer la probabilité de non dépassement $F(x_i)$ qu'il convient d'attribuer à chaque valeur x_i. Il existe de nombreuses formules d'estimation de la fonction de répartition $\hat{F}(x)$ à l'aide de la fréquence empirique. Elles reposent toutes sur un tri de la série par valeurs croissantes permettant d'associer à chaque valeur son rang *r*. Des simulations ont montré que pour la loi de Gumbel, il faut utiliser la fréquence empirique de Hazen :

$$F\left(x_{[r]}\right) = \frac{r-0.5}{n} \qquad (5)$$

où *r* est le rang dans la série de données classée par valeurs croissantes, *n* est la taille de l'échantillon, $x_{[r]}$ la valeur de rang *r*.

Rappelons encore que le temps de retour *T* d'un événement est défini comme étant l'inverse de la fréquence d'apparition de l'événement. Soit :

$$T = \frac{1}{1-F_Q(x_Q)}. \qquad (6)$$

A l'aide de l'ajustement, il est alors possible d'estimer le débit de pointe pour un temps de retour donné.

⊙ Méthode à appliquer : Méthode des moments

La méthode des moments consiste à égaler les moments des échantillons avec les moments théoriques de la loi. Par la méthode des moments les paramètres *a* et *b* sont calculés d'après les formules :

$$\begin{cases} \hat{b} = \dfrac{\sqrt{6}}{\pi}\hat{\sigma} \\ \hat{a} = \hat{\mu} - \hat{b}\gamma. \end{cases} \quad \text{avec } \gamma = 0.5772 \text{ (constante d'Euler).} \quad (7)$$

avec

σ : écart-type des valeurs composant l'échantillon.

μ : moyenne de l'échantillon.

Dès lors il est possible d'estimer les débits dont la représentation graphique est une droite d'équation :

$$\hat{Q} = \hat{a} + \hat{b}\cdot u \qquad (8)$$

avec : u: variable réduite (cf. équation (4)).

⊙ Démarche et résultats

Pour une durée de pluie donnée, l'estimation du temps de retour de chaque lame précipitée, s'effectue selon les étapes :

Etape 1 : Préparation de la série de données des lames précipitée :

- Trier les valeurs dans l'ordre croissant.
- Attribuer un rang à chaque valeur.

Etape 2 : Calcul de la fréquence empirique pour chaque rang (Hazen, équation (5)).

Etape 3 : Calcul de la variable réduite « u » du Gumbel (équation (4)).

Etape 4 : Représentation graphique des couples (u_i, x_i) de la série à ajuster (figure 1).

Etape 5 : Ajustement d'une relation linaire de type $x_q = a + bu_q$ aux couples (u_i, x_i) (figure 1).

Avec la méthode des moments on obtient :

	pluie de 1 jour	pluie de 2 jours	pluie de 3 jours	pluie de 4 jours	pluie de 5 jours	
paramètre b =	92	133	132	126	147	[mm/10]
paramètre a =	434.3	548.5	596.7	635.0	648.3	[mm/10]

Vérifier de manière visuelle l'ajustement. A ce stade, il serait nécessaire de vérifier statistiquement que les valeurs observées sont estimées « de manière satisfaisante » à l'aide de tests d'ajustement appropriés.

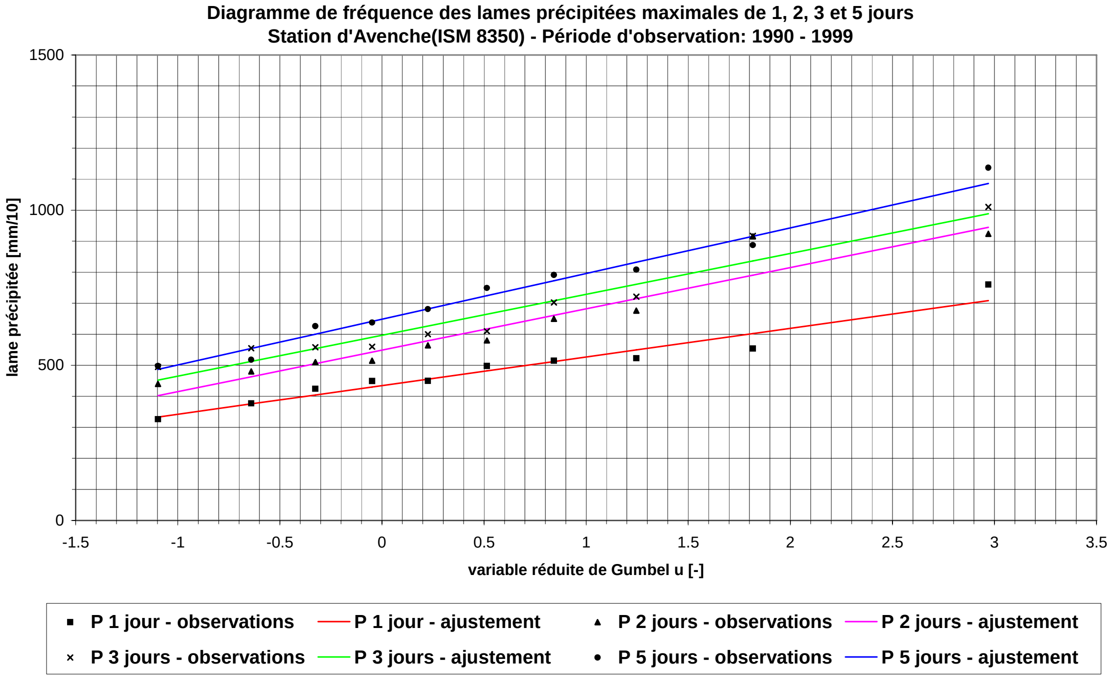

Figure 1. Ajustement graphique du modèle (calcul des paramètres « a » et « b » de la droite d'ajustement de Gumbel par la méthode des moments) pour les 5 séries de données

Etape 6 : Utilisation du modèle statistique pour estimer les lames précipitées de différents temps de retour *T*. Par exemple, pour *T*=20 ans et *t*=24 h, on suit les étapes suivantes :

- Calcul de la fréquence de non-dépassement d'après la relation (6) :

$$F(Q_p(T)) = 1 - \frac{1}{T} = 1 - \frac{1}{20} = 0,95$$

- Calcul de la variable réduite de Gumbel correspondante d'après la relation (4) :

$$u = -\ln\left(-\ln\left(F(Q_p(T))\right)\right) = -\ln\left(-\ln\left(0,95\right)\right) = 2,97$$

- Calcul du quantile correspondant d'après la relation linéaire (avec *a* et *b* fournis par l'étape 5 précédente) : $L_{(20,24)} = a_{(24)} + b_{(24)} \cdot u_{20} = 434.3 + 92 \cdot 2.97 = 708 \quad \text{mm/10}$

L'ensemble des résultats pour les 5 séries de données (*t*=1 à 5 jours) sont regroupés dans le tableau 1 suivant :

Tableau 1 : Estimation des lames précipitées, en mm/10, à la station pluviométrique d'Avenches pour différents temps de retour et pour la période 1990– 1999

	Temps de retour				
Durée *d* [h]	**2** [an]	**5** [an]	**10** [an]	**20** [an]	**50** [an]
24	468	573	642	708	794
48	597	748	848	944	1069
72	645	794	893	988	1111
96	681	824	918	1009	1126
120	702	869	980	1086	1223

Question 2. Représentation graphique sous la forme de courbes Intensité – Durée – Fréquence

⦿ Méthode à appliquer : définition des courbes IDF

Les courbes IDF représentent l'intensité pluviométrique *i* en fonction de la durée de l'averse et de son temps de retour *T*.

⦿ Résultats :

Il s'agit donc simplement de calculer à partir du tableau 1 précédent et pour chaque temps de retour et durée de pluie considérée, l'intensité pluviométrique moyenne maximale. Les résultats sont regroupés dans le tableau 2 suivant :

Tableau 2 : Estimation des intensités moyenne, en mm/h, à la station pluviométrique d'Avenches pour différents temps de retour et pour la période 1990 – 1999

	Temps de retour				
Durée *d* [h]	**2** [an]	**5** [an]	**10** [an]	**20** [an]	**50** [an]
24	2.0	2.4	2.7	3.0	3.3
48	1.2	1.6	1.8	2.0	2.2
72	0.9	1.1	1.2	1.4	1.5
96	0.7	0.9	1.0	1.1	1.2
120	0.6	0.7	0.8	0.9	1.0

La représentation graphique des valeurs du tableau 2 permet d'avoir une idée sur l'allure des courbes IDF à Avenches (figure 2). Lors de la lecture d'un tel graphique, il faut être attentif aux unités employées ainsi qu'aux échelles des axes ; l'allure des courbes IDF peut être très différente.

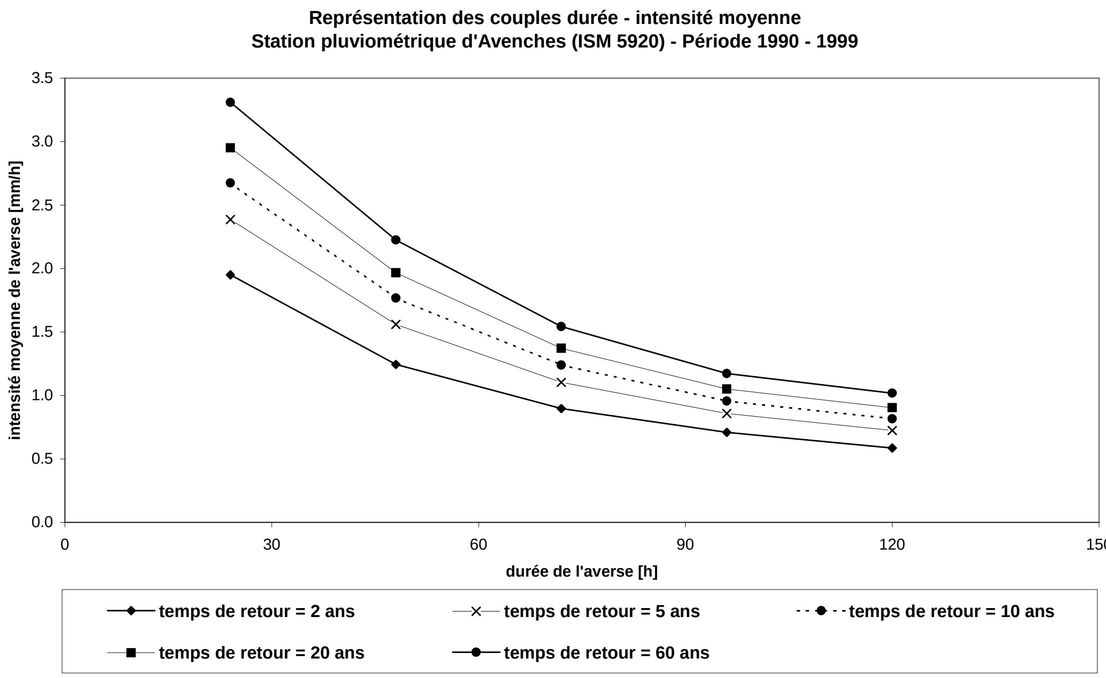

Figure 2 : Représentation des couples durée – intensité moyenne déterminés à la station pluviométrique d'Avenches pour la période 1990– 1999