

## Exercice n° HU 0502 - Corrigé

### Dimensionnement d'un système de stockage des eaux de pluie sur parking et toitures pour laminage de crue sous contraintes

#### Données de l'exercice :

Les séries de précipitations sont fournies dans le fichier Excel « HU0502\_donnees.xls ». Les résultats sont aussi disponibles sur le fichier Excel « HU0502\_corrige.xls ».

#### Modélisation et résolution mathématique du problème

Résolution mathématique pour chaque toiture (même résolution pour le parking) : le fonctionnement du système de régulation des débits de vidange du volume stocké sur chaque toiture est décrit par le système d'équations donné dans l'énoncé. Deux régimes de fonctionnement peuvent être observés, suivant que le système de limitation du débit de vidange est activé ou non, c'est à dire suivant que le débit de vidange  $q^*(t)$  qui serait obtenu sans système de régulation est supérieur ou non au débit limite de régulation  $q_{lim}$ .

#### Régime de fonctionnement 1 : le débit est non contrôlé

(le système de limitation du débit de vidange est non actif)

Ce régime est observé si  $q^*(t) < q_{lim}$

$$\begin{cases} \frac{\partial h(t)}{\partial t} = p(t) - q(t) \\ q(t) = \frac{h(t)}{K} \end{cases} \quad \begin{array}{l} \text{système} \\ \text{d'équations } \Sigma 1 \end{array}$$

#### Régime de fonctionnement 2 : le débit est contrôlé

(le système de limitation du débit de vidange est actif)

Ce régime est observé si  $q^*(t) > q_{lim}$

$$\begin{cases} \frac{\partial h(t)}{\partial t} = p(t) - q(t) \\ q(t) = q_{lim} \quad \text{avec } q_{lim} = \frac{Q_{lim}}{A} \end{cases} \quad \begin{array}{l} \text{système} \\ \text{d'équations } \Sigma 2 \end{array}$$

avec  $q^*(t) = h(t)/K$  : le débit de vidange (mm/mn) qui serait obtenu au temps  $t$  sans système régulation,  $p(t)$  intensité de la pluie nette au temps  $t$  (mm/mn),  $h(t)$  : hauteur d'eau stockée sur la surface (mm),  $K$  : paramètre du modèle du réservoir pseudo-linéaire (mn). Attention aux unités : débits et pluies = intensités (mm/mn).

**Remarque 1 :** On résout le système d'équations de façon discrète, c'est à dire que l'on détermine l'état du système « toiture » (hauteur d'eau stockée  $h(t)$  et débit de vidange  $q(t)$ ) pour un nombre limité d'instant  $t$  :  $t_0, t_0+\Delta t, t_0+2\Delta t, \dots$ . Connaissant l'état du système à l'instant  $t_i$ , on peut déterminer l'état du système à l'instant  $t_i+\Delta t$  à l'aide du système d'équations correspondant au régime de fonctionnement observable sur cet intervalle de temps  $[t_i, t_i+\Delta t]$ . La difficulté est que le régime de fonctionnement du système peut varier au cours de cet intervalle de temps. Si le cas se produit, un seul système d'équation  $\Sigma 1$  ou  $\Sigma 2$  n'est donc pas suffisant pour résoudre le problème entre  $[t_i, t_i+\Delta t]$ . Il faudrait donc en théorie identifier entre  $[t_i, t_i+\Delta t]$  les éventuels moments  $t^*_1, t^*_2, t^*_3, \dots$  où l'on observe des changements de régimes et résoudre successivement le système d'équation  $\Sigma 2$  (resp.  $\Sigma 1$ ) sur  $[t_i, t^*_1]$  ; le système  $\Sigma 1$  (resp.  $\Sigma 2$ ) sur  $[t^*_1, t^*_2]$  ; le système  $\Sigma 2$  (resp.  $\Sigma 1$ ) sur  $[t^*_2, t^*_3], \dots$ , etc, et enfin le système  $\Sigma 1$  ou  $\Sigma 2$  sur  $[t^*_n, t_i+\Delta t]$ .

Différentes remarques conduisent à écarter cette façon de résoudre le problème :

- La détermination des éventuels moments où l'on observerait un changement de régime est loin d'être immédiate (recours indispensable à l'intégration des équations de base, équations compliquées...);
- La prise en compte de ces moments de changement de régime de fonctionnement perturberait la procédure de calcul simple qui peut être mise en place dans un tableur sur la base d'une discrétisation temporelle à pas de temps  $\Delta t$  constant ;
- Une résolution si détaillée n'aurait pas de sens au regard des simplifications et hypothèses effectuées par ailleurs pour l'établissement du modèle de comportement du système « toitures » (ou parking).

La solution adoptée ici pour résoudre le problème est donc de considérer de façon simplifiée que le régime de fonctionnement ne change pas pendant tout l'intervalle de temps  $[t_i, t_i + \Delta t]$  et qu'il est déterminé en fonction de l'état du système au début de chaque intervalle de temps (au temps  $t_i$ ). Pour chaque intervalle de temps  $[t_i, t_i + \Delta t]$ , on doit donc résoudre ensuite soit le système d'équation  $\Sigma 1$  soit le système d'équations  $\Sigma 2$ .

**Remarque 2 :** Si  $q^*(t_i) = q_{lim}$ , le régime de fonctionnement du système est indéterminé si l'on suit la procédure de décision établie plus haut. Le régime de fonctionnement dépend en fait de l'intensité moyenne  $p([t_i, t_i + \Delta t])$  de la pluie tombant sur le système pendant l'intervalle de temps  $[t_i, t_i + \Delta t]$ . Deux cas de figures sont à considérer :

- Si  $p([t_i, t_i + \Delta t]) \geq q_{lim}$  alors Régime de fonctionnement 2  
 Si  $p([t_i, t_i + \Delta t]) < q_{lim}$  alors Régime de fonctionnement 1

L'intensité  $p([t_i, t_i + \Delta t])$  est exprimée dans les mêmes unités que le débit de régulation  $q_{lim}$ .

**Remarque 3 :** Pour déterminer lequel des deux régimes de fonctionnement est observé, il n'est pas pratique de comparer le débit de vidange  $q^*(t_i)$  et  $q_{lim}$  puisque  $q^*(t_i)$  ne nous intéresse pas a priori (débit pour un système non régulé).

Il est plus intéressant de se baser sur la hauteur d'eau stockée sur la toiture puisque pour un système non régulé  $h(t) = K \cdot q^*(t)$  (où  $K$  est le paramètre du réservoir pseudo-linéaire).

Pour déterminer le régime de fonctionnement sur  $[t_i, t_i + \Delta t]$ , on comparera donc  $h(t_i)$  à la hauteur limite de stockage  $h_{lim} = K \cdot q_{lim}$  permettant de distinguer les deux régimes de fonctionnement 1 ou 2.

**En résumé :** On suivra l'algorithme de la figure 1.

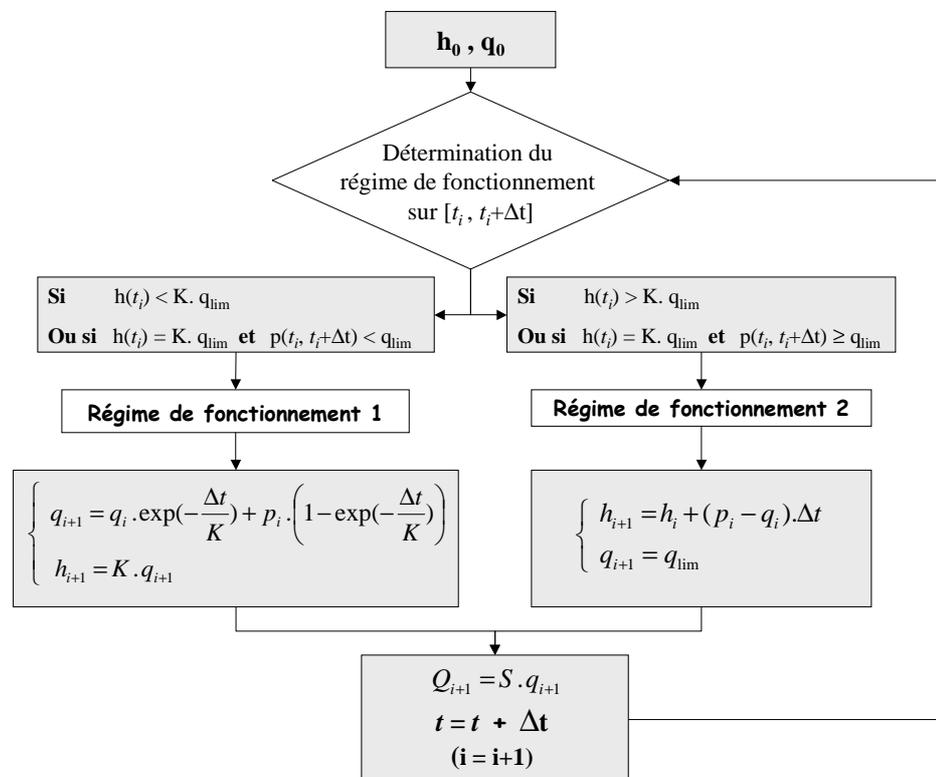


Figure 1. Algorithme de résolution

**Remarque 4 :** Il est nécessaire de travailler dans toutes les équations ci-dessus avec des grandeurs homogènes (ie, débits  $q(t_i)$ ,  $q_{lim}$  et intensités de pluie  $p(t_i)$  en  $mm/mn - K$ ,  $t$  et  $\Delta t$  en  $mn$ ,  $h(t_i)$  en  $mm$ ). On conseille de déterminer l'hydrogramme du débit spécifique en  $mm/mn$  à l'aide des équations ci-dessus et ensuite de déterminer indépendamment l'hydrogramme du débit réel en  $m^3/s$  à partir de ce dernier.

### Question 1. Acceptabilité d'une configuration non régulée.

#### ⊙ Démarche à appliquer :

La simulation est faite avec le modèle développé dans la feuille de calcul sur la base de l'organigramme ci-dessus. Le débit en sortie du parking et des toitures n'est pas régulé. On prendra donc la même feuille de calcul en mettant une valeur importante pour  $q_{P\ lim}$ , et pour  $q_{T\ lim}$ .

#### ⊙ Résultats :

Les apports provenant des 4 toitures et du parking sont supérieurs à la capacité maximum  $Q_0$  du collecteur d'évacuation des eaux pluviales : les débits de pointe non laminés sont respectivement 3 - 5.6 - 6.5 et 7.6  $m^3/s$  pour P1 , P2, P3, et P4 !...

### Question 2. Possibilité de réguler seulement les débits de toiture.

#### ⊙ Démarche à appliquer :

En principe, on répond à la question par simulation. La simulation est faite avec le modèle développé dans la feuille de calcul sur la base de l'organigramme ci-dessus. Seul le débit en sortie des toitures est régulé. On effectuera donc la simulation avec différentes valeurs de  $q_{T\ lim}$ . En pratique, la simulation n'est pas nécessaire (cf. considérations ci-dessous).

#### ⊙ Résultats :

Une régulation de la vidange du volume stocké sur les toitures n'est pas suffisante pour réduire les apports des pluies P2, P3, et P4 ( $T_{intensité\ moyenne}=100ans$ ) : les débits de pointe de la contribution du seul parking sont respectivement 3 - 3.36 - 4  $m^3/s$  pour P2, P3, et P4 (et  $Q_0 = 2.5 m^3/s$ )...

### Question 3. Configurations de régulation possibles sous contraintes

#### ⊙ Problème à résoudre :

Déterminer un couple ( $q_{P\ lim}$ ,  $q_{T\ lim}$ ) de débits de régulation de la vidange des deux systèmes de stockage temporaire des eaux pluviales permettant de satisfaire les contraintes suivantes :

$$\text{Pour les toitures : } H_T(t) < H_{T\ max\ lim} = 5\text{ cm} \quad \forall t$$

$$\text{Pour le parking : } H_P(t) < H_{P\ max\ lim} = 2.5\text{ cm} \quad \forall t$$

$$\text{Pour le collecteur : } Q_{coll}(t) < Q_0 = 2.5\text{ m}^3/s \quad \forall t \quad \text{ou encore } Q_p < Q_0$$

où  $H_{T\ max\ lim}$  et  $H_{P\ max\ lim}$  sont respectivement les hauteurs d'eau maximum admissibles sur les toitures et sur le parking, et où  $Q_0$  est le débit maximum acceptable dans le collecteur = 2.5  $m^3/s$

Pour avoir, sur une surface donnée, une hauteur d'eau maximum la plus faible possible, il faut un débit de régulation de la vidange le plus grand possible. Pour que le débit maximum observé dans le collecteur de sortie soit le plus petit possible, il faut grossièrement avoir des débits de régulation les plus petits possibles pour la vidange des deux types de surface. Dimensionner le système revient donc à **trouver un couple ( $q_{P\ lim}$ ,  $q_{T\ lim}$ ) de débits de régulation** permettant de respecter les différentes contraintes de dimensionnement et permettant en particulier de réaliser un compromis acceptable entre les deux objectifs concurrents précédents.

### ⊙ Méthodologie pour la résolution du problème :

On doit donc résoudre un problème non trivial, s'apparentant à un problème d'optimisation sous contraintes, qui nécessite de surcroît de mettre en œuvre un modèle à réservoir pseudo-linéaire. Nous n'avons pas de méthode simple à proposer pour résoudre directement ce problème. Nous proposons donc simplement de fixer différents couples de débits de régulation ( $q_{P \text{ lim}}, q_{T \text{ lim}}$ ), de simuler pour chacun de ces couples le comportement du système, d'en extraire les valeurs de différentes variables importantes pour le dimensionnement ( $H_{T \text{ max}}, H_{P \text{ max}}, Q_{p \text{ coll}}$ ) et d'en déduire si la configuration de régulation ( $q_{P \text{ lim}}, q_{T \text{ lim}}$ ) peut être acceptée ou non. Il s'agit donc d'effectuer une analyse de sensibilité du fonctionnement du système par rapport aux deux paramètres à déterminer ( $q_{P \text{ lim}}, q_{T \text{ lim}}$ ). Une fois cette analyse de sensibilité réalisée, il sera possible d'identifier l'ensemble  $\mathcal{E}$  des configurations de régulation acceptables au regard des contraintes fixées par ailleurs et, si cet ensemble  $\mathcal{E}$  est non vide, d'en retenir une qui permettra donc de répondre au problème posé.

#### *Analyse de sensibilité au débit de régulation de la vidange du parking : $q_{P \text{ lim}}$*

Supposons que l'on ait choisi un débit de régulation pour la vidange du parking ( $q_{P \text{ lim}} = Q_{p \text{ lim}} / S_{\text{park}}$ ) et que l'on souhaite déterminer le débit de vidange des toitures optimum correspondant ( $q_{T \text{ lim}} = Q_{T \text{ lim}} / S_{\text{Toit}}$ ). Il est immédiat que celui qui satisfait à l'équation  $Q_{T \text{ lim}} \leq Q_0 - Q_{P \text{ lim}}$  permet de répondre à la contrainte sur le débit de pointe de l'hydrogramme laminé :

- où  $Q_{T \text{ lim}}$  ( $\text{m}^3/\text{s}$ ) est le débit de régulation pour l'ensemble des 4 toitures (le débit de régulation pour une toiture est donc  $Q_{T \text{ lim}} / 4$ )
- et où  $Q_{P \text{ lim}}$  ( $\text{m}^3/\text{s}$ ) est le débit de régulation de la vidange du parking.

Pour déterminer l'ensemble  $\mathcal{E}$  des configurations ( $Q_{P \text{ lim}}, Q_{T \text{ lim}}$ ) acceptables, on opère donc de la façon suivante :

1/ on fait varier  $Q_{P \text{ lim}}$  de sa valeur minimum physiquement possible ( $Q_{P \text{ lim}} = 0$ ) à sa valeur maximum physiquement possible compte tenu du débit maximum acceptable dans le collecteur (d'où  $Q_{P \text{ lim}} = 2.5 \text{ m}^3/\text{s}$ )....

2/ pour chaque valeur débit  $Q_{P \text{ lim}}$ , on déduit la valeur sensée être optimale pour le débit de régulation de la vidange des toitures :  $Q_{T \text{ lim}} = Q_0 - Q_{P \text{ lim}}$

3/ on extrait de la feuille de calcul Excel, les valeurs des grandeurs suivantes : hauteur maximum de stockage sur les toitures ( $H_{T \text{ max}}$ ), hauteur maximum de stockage sur le parking ( $H_{P \text{ max}}$ ), débit le pointe de l'hydrogramme dans le collecteur ( $Q_p$ ).

### ⊙ Résultats et commentaires :

#### **Respect des contraintes de hauteur maximum sur les toitures et sur le parking : remarques.**

La hauteur d'eau maximal sur le parking ou sur les toitures ne peut bien évidemment pas, du fait de l'hypothèse que la hauteur d'eau est uniforme sur chacune de ces surfaces, être supérieure à la hauteur totale de la pluie nette (égale ici à la pluie brute). On peut par exemple le vérifier avec la feuille de calcul Excel en mettant pour l'une ou l'autre des surfaces un débit de régulation de la vidange  $q_{\text{lim}} = 0$  (d'où stockage de toute la pluie sur les surfaces). Conséquences immédiates :

- **Pour les toitures :** quelque soit le débit de régulation  $Q_{T \text{ lim}}$  choisi, la condition  $h_{T \text{ max}} < 5 \text{ cm}$  sera toujours vérifiée, en particulier pour la pluie P1 de période de retour  $T=5\text{ans}$  (puisque  $H_p=23.8\text{mm}$ ) et pour les différentes pluies de période de retour  $T=100\text{ans}$  (puisque  $H_p=40\text{mm}$ ). La condition  $h_{T \text{ max}} < 5 \text{ cm}$  ne constitue donc pas une contrainte pour le dimensionnement du système.
- **Pour le parking :** quelque soit le débit de régulation  $Q_{P \text{ lim}}$  choisi, la condition  $H_{P \text{ max}} < 2.5 \text{ cm}$  sera toujours vérifiée pour la pluie P1 de période de retour  $T=5\text{ans}$  (puisque  $H_p=23.8\text{mm}$ ). En revanche, elle peut ne pas être vérifiée pour les pluies de période de retour  $T=100\text{ans}$ . En effet,  $H_p=40\text{mm} > 2.5\text{cm}$ . Par ailleurs, plus le débit de régulation de la vidange sera faible, plus la hauteur d'eau maximale observée sur cette surface pour un événement pluvieux donné sera grande. Si problèmes il y a, ceux ci seront d'abord observés pour les débits faibles de régulation de la vidange du parking ...

⊙ Réponse à la question 3):

Cf. les résultats de l'analyse de sensibilité décrits sur les graphiques de la figure 2 où la variable considérée est donnée en fonction du débit de régulation pour le parking [ $Y = f(Q_{P \text{ lim}})$ ].

**Contrainte  $Q_p \leq Q_0$**  : compte-tenu de la relation forcée adoptée entre  $Q_{T \text{ lim}}$ ,  $Q_0$  et  $Q_{P \text{ lim}}$  cette contrainte est donc automatiquement vérifiée.

**Contrainte  $H_{T \text{ max}} < 5 \text{ cm}$**  : comme prévu, du fait de la hauteur maximale des pluies étudiées, la contrainte sur la hauteur d'eau maximum atteinte sur les toitures est toujours respectée.

**Contrainte  $H_{P \text{ max}} < 2.5 \text{ cm}$**  :

Pour la pluie P1 (T=5ans), tous les débits de régulation de la vidange du parking permettent de respecter la contrainte.

Cet ensemble de débits de régulation acceptables se réduit pour les pluies dont l'intensité moyenne maximal a pour période de retour T=100ans:

- pour P2 (pluie triangulaire avancée) : seuls les débits de régulation de la vidange du parking supérieurs à  $Q_{P \text{ lim } 1} = 1.1 \text{ m}^3/\text{s}$  sont satisfaisants.
- pour P3 (pluie triangulaire centrée) : seuls les débits de régulation de la vidange du parking supérieurs à  $Q_{P \text{ lim } 2} = 1.8 \text{ m}^3/\text{s}$  sont satisfaisants.
- Pour P4 (pluie triangulaire retardée) : aucune configuration de régulation n'est satisfaisante : toutes les hauteurs de stockages sur le parking sont supérieures à 2.56cm.

Si l'on s'en tient strictement aux contraintes imposées, aucune configuration de régulation ne serait donc possible et il faudrait envisager un autre système de régulation de la vidange de quantités de pluies stockées sur les toitures et parking. En pratique, on peut cependant envisager d'accepter toute configuration de régulation telle que :

- $Q_{P \text{ lim}} \geq 1.8 \text{ m}^3/\text{s}$  (puisque  $H_{T \text{ max}} = 2.56 \text{ cm} \# 2.5 \text{ cm}$ )
- **ET**  $Q_{T \text{ lim}} = 2.5 \text{ m}^3/\text{s} - Q_{P \text{ lim}}$

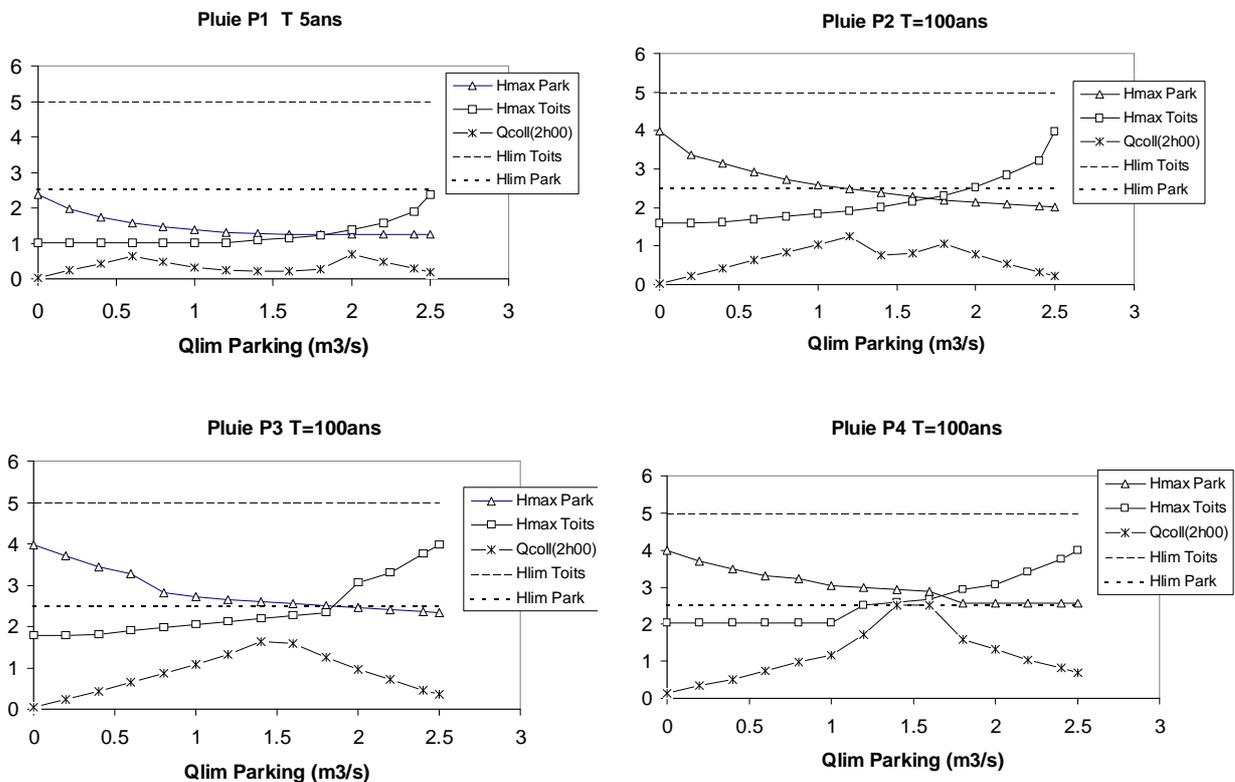


Figure 2. Résultats de l'analyse de sensibilité

**Question 4. Acceptabilité de la configuration proposée :**  $Q_{P \text{ lim.}} = 2\text{m}^3/\text{s}$ ;  $Q_{T \text{ lim.}} = 0.25\text{m}^3/\text{s}$

⊙ **Démarche à appliquer :**

On répond à la question par simulation avec comme débits de régulation ceux de la configuration proposée ( $Q_{P \text{ lim.}} = 2\text{m}^3/\text{s}$ ;  $Q_{T \text{ lim.}} = 0.25\text{m}^3/\text{s}$ ).

⊙ **Réponse à la question 4):**

La configuration proposée ( $Q_{P \text{ lim.}} = 2\text{m}^3/\text{s}$ ;  $Q_{T \text{ lim.}} = 0.25\text{m}^3/\text{s}$ ) est à l'évidence moins intéressante que la configuration ( $Q_{P \text{ lim.}} = 2.25\text{m}^3/\text{s}$ ;  $Q_{T \text{ lim.}} = 0.25\text{m}^3/\text{s}$ ). Cette dernière ne pose un problème en rapport avec la hauteur maximum de stockage sur les toitures que pour la pluie retardée P4 de période de retour  $T=100$ ans. Au regard des résultats qui précèdent, cette configuration peut donc être acceptée. On vérifie aussi que cette configuration conduit à des temps de submersion des toitures acceptables : ils sont respectivement de 4h30, 6h et 8h00 pour les pluies P1, P2 et P4.

⊙ **Remarques :**

- Le système de régulation des vidanges mis en place est très performant puisque les débits de pointe non laminés sont respectivement 3 ; 5.6 ; 6.5 ; et 7.6  $\text{m}^3/\text{s}$  pour P1 , P2, P3, et P4 !...
- On retrouve le résultat fréquemment mis en évidence dans la littérature scientifique comme quoi 1/ la forme des pluies a une importance non négligeable sur la réponse d'un système hydrologique (v. différences obtenues entre pluies avancée – centrée et retardée) et que 2/ les pluies de forme triangulaire retardée sont souvent les plus défavorables.
- D'autres contraintes pourraient bien entendu être rajoutées au problème de dimensionnement : temps de submersion des toitures ou contraintes permettant d'assurer la cohérence d'une gestion globale et concertée à l'échelle de tout un bassin versant.

**Question 5. Possibilité d'une gestion concertée à l'échelle du bassin versant**

⊙ **Démarche à appliquer :**

On ajoute la contrainte prioritaire supplémentaire suivante sur le débit maximum admissible dans le collecteur pour tout instant situé 2h00 ou plus après le début de l'événement.

Pour le collecteur :  $Q_{\text{coll}}(t > 2\text{h}00) < Q_{0(2\text{h}00)} = 0.7 \text{ m}^3/\text{s} \quad \forall t > 2\text{h}00$

On cherche, par simulation, à l'aide d'une analyse de sensibilité appropriée, les valeurs de débit de régulation qui permettent de satisfaire cette contrainte.

⊙ **Résultats :**

Le dimensionnement avec cette nouvelle contrainte devient impossible puisque seules les configurations telles que  $Q_{P \text{ lim.}} < 0.5\text{m}^3/\text{s}$  peuvent la satisfaire et elles sont incompatibles avec celles déterminées précédemment ( $Q_{P \text{ lim.}} > 1.8\text{m}^3/\text{s}$  pour satisfaire la hauteur maximum admissible de stockage sur le parking). Le dimensionnement est en revanche possible dès que l'on supprime la contrainte sur la hauteur d'eau maximum admissible sur le parking (cf. Figure 3).

Les configurations de dimensionnement possibles sont telles que  $Q_{P \text{ lim.}} \leq 0.6 \text{ m}^3/\text{s}$  ou telles que  $Q_{P \text{ lim.}} \geq 2.4 \text{ m}^3/\text{s}$ .

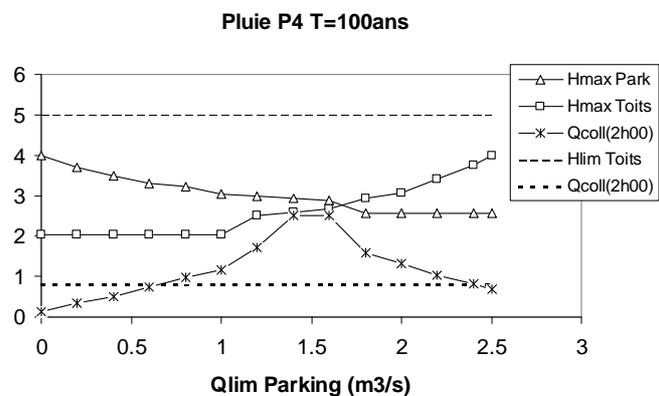


Figure 3. Résultats de l'analyse de sensibilité